# Couches limites semilinéaires

25 Mai 2004

Franck SUEUR
Email: Franck.Sueur@cmi.univ-mrs.fr
Laboratoire d'Analyse, Topologie et Probabilités.
Centre de Mathématiques et d'Informatique.
Université de Provence. 39 rue F. Joliot-Curie, 13453 Marseille. France

**Résumé**

On s'intéresse à des problèmes mixtes pour des systèmes symétriques hyperboliques multidimensionnels semilinéaires perturbés par une petite viscosité. La description à la limite non visqueuse recquiert des développements du type BKW mettant en évidence une couche limite caractéristique (CLC) et une couche limite non caractéristique (CLNC). Ce thème traité dans [12] est ici enrichi de trois améliorations :
• l'étude inclut des développements ayant peu de termes (comme un seul terme),
• on étudie aussi bien la propagation que le problème de Cauchy et les conditions de compatibilité des données,
• l'étude de l'interaction CLC-CLNC est approfondie.

**Abstract**

In this article, we consider boundary problem for semilinear symmetric hyperbolic systems in several space dimensions perturbated by a small viscosity. This theme is tackled in [12] and the inviscid limit is described by WKB-like asymptotic expansions. The latter involve characteristic and non characteristic boundary layers. Here, we give three improvements:
• we consider expansions with a few terms (for example with one term),
• we also look at the initial boundary value problem and at compatibilities between initial and boundaries data,
• the interaction between the non characteristic boundary layer and the characteristic one is pushed further.

## 1 Introduction

De nombreux systèmes hyperboliques sont obtenus dans le cadre d'une modélisation négligeant un petit paramètre de viscosité. (mécanique des fluides [7] [6], micromagnétisme [4]) Aussi, une question intéressante est celle du comportement à la limite non visqueuse.

Plus précisément, l'objet de cette article est l'étude de systèmes symétriques hyperboliques multidimensionnels semilinéaires perturbés par une petite viscosité. On considère donc un opérateur

$$\mathcal{H} := A_0(t,x)\partial_t + \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} A_j(t,x)\partial_j + B(t,x)$$

symétrique hyperbolique, un opérateur

$$\mathcal{E} := \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \partial_i E_{i,j}(t,x)\partial_j$$

uniformément elliptique et l'équation

$$\mathcal{L}^\varepsilon u^\varepsilon = 0 \tag{1}$$

où

$$\mathcal{L}^\varepsilon u := \mathcal{H}u - (F(t,x,u) + f(t,x) + \varepsilon \mathcal{E} u)$$

et $\varepsilon$ est un coefficient positif destiné à tendre vers 0. Les matrices $A_j$, $E_{i,j}$ et $B$ sont de taille $L \times L$, $C^\infty$ de leurs arguments, constantes hors d'un compact de $\mathbb{R}^{n+1}$. Les fonctions $f$ et $F$ sont à valeurs dans $\mathbb{R}^L$ et $F$ dépend de façon $C^\infty$ de ses arguments . On suppose que pour tout $(t,x)$ dans $\mathbb{R}^{1+n}$, $F(t,x,0) = 0$. Les matrices $E_{i,j}$ vérifient, pour tout $(t,x)$ dans $\mathbb{R}^{1+n}$ et $\zeta \in S^{n-1}$, où $S^{n-1}$ désigne la sphère euclidienne unité de $\mathbb{R}^n$, $\sum_{i,j} \zeta_i \zeta_j E_{i,j} \geqslant Id_{\mathbb{R}^L}$.

Pour chaque $\varepsilon \in [0,1]$, les solutions $u^\varepsilon$ que l'on considère sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^L$ régulières par rapport à leur argument $(t,x)$ et locales en temps, une non linéarité pouvant entraîner une explosion en temps fini. Les théories classiques des problèmes paraboliques et hyperboliques multidimensionnels mettent en avant le pertinence des espaces de Sobolev $H^s$ construits sur $L^2$.

Nous étudierons le cas modèle du demi-espace et prescrirons une condition de Dirichlet homogène pour les perturbations visqueuses. Pour un fluide, ceci correspond à la condition naturelle d'adhérence à une paroi rigide. Les résultats s'étendent de manière classique au cas d'un domaine spatial situé d'un seul côté de son bord $C^\infty$.([4],[19]) Notant $x = (y, x_n)$, et pour $T > 0$, les domaines

$$\Omega_T := \{(t,x) \in \mathbb{R}^{1+n} / 0 < t < T, x_n > 0\},$$
$$\Gamma_T := \{(t,y,0) \in \mathbb{R}^{1+n} / 0 < t < T\},$$

le problème peut s'écrire, pour tout $\varepsilon \in ]0,1]$, $Pb^\varepsilon(T)$ :

$$\mathcal{L}^\varepsilon u^\varepsilon = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_T, \tag{2}$$
$$u^\varepsilon = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T. \tag{3}$$

Suivant [24], on fait l'hypothèse :

**Hypothèse 1.1** *La dimension de* $\ker A_n(t,y,0)$ *est indépendante de* $(t,y,0)$ *dans* $\Gamma_\infty$.

Notons que lorsque le bord $\Gamma_\infty$ est non carctéristique, c'est à dire lorsque la matrice $A_n(t,y,0)$ est inversible pour tout $(t,y,0) \in \Gamma_\infty$, ceci constitue un cas particulier de l'hypothèse 1.1.

Ce problème a été étudié dans [12] où il est montré que lorsque les $u^\varepsilon$ sont nuls dans le passé, la famille des solutions $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ admettent, dans le futur, un développement en couches limites de type BKW.

Dans cet article on s'intéresse de manière plus précise à l'existence et à la stabilité de solutions admettant un développement BKW de la forme

$$u^\varepsilon(t,x) := \sum_{j=0}^{N} \sqrt{\varepsilon}^j\, \mathcal{U}^j(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon},\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}) + \sqrt{\varepsilon}^{N+1}\, r_\varepsilon(t,x) \tag{4}$$

où

$$\mathcal{U}^j(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon},\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}) := \mathcal{U}_a^j(t,x) + \mathcal{U}_b^j(t,x,\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}) + \mathcal{U}_c^j(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon}).$$

Le terme $\mathcal{U}_a$ est la partie régulière ou intérieur du profil, $\mathcal{U}_b$ est un terme de couche limite caractéristique (CLC), $\mathcal{U}_c$ un terme de couche limite non caractéristique (CLNC) et $r_\varepsilon$ joue le rôle de reste. En particulier, $u^0 := \mathcal{U}_a^0$ est solution du problème hyperbolique limite $Pb^0(T)$ :

$$\mathcal{L}^0 u^0 = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_T, \tag{5}$$

$$\Pi_+ u^0 = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T, \tag{6}$$

où $\Pi_+$ est le projecteur spectral associé au sous-espace stable dans la décomposition spectrale de $(E_{n,n}^{-1}A_n)|_{x_n=0}$. Les conditions au bord (6) sont dites résiduelles.

Plus généralement, on identifiera pour les profils $(\mathcal{U}^j)_{0\leqslant j\leqslant N}$ une cascade d'équations $(S^j(T))_{0\leqslant j\leqslant N}$ et de conditions aux limites $(S_{cl}^j(T))_{0\leqslant j\leqslant N}$ naturellement associées aux profils $(\mathcal{U}^j)_{0\leqslant j\leqslant N}$ (section 5.5).

Pour la famille des restes $(r_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, on introduira (cf section 3.1.2) des ensembles adaptés $\Gamma^m(T)$.

Pour illustrer notre propos, on donne dès maintenant un premier énoncé concernant la propagation de développements BKW.

**Théorème 1.1** *Soit* $0 < T_0 < T$, $N \in \mathbb{N}$. *Si l'on dispose d'une famille de solutions* $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ *des problèmes* $(Pb^\varepsilon(T_0))_{\varepsilon>0}$ *de la forme* (4) *où les* $(\mathcal{U}^j)_{0\leqslant j\leqslant N}$ *vérifient les problèmes* $(S^j(T))_{0\leqslant j\leqslant N}$-$(S_{cl}^j(T))_{0\leqslant j\leqslant N}$ *et* $(r_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \in \Gamma^m(T)$, *alors* *il existe $T' \in ]T_0, T]$ et des prolongements de $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, $(r_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \in \Gamma^m(T')$ et des $(\mathcal{U}^j)_{0\leqslant j\leqslant N}$ vérifiant les problèmes $(S^j(T'))_{0\leqslant j\leqslant N}$-$(S^j_{cl}(T'))_{0\leqslant j\leqslant N}$ telles que* (2), (3) *et* (4) *soient valides sur* $(0, T')$.

On renvoie à la section 3 pour un exposé plus complet des résultats de l'article, et plus précisemment à la fin de la section 3.2.3 pour un retour sur le résultat du théorème 1.1.

Signalons ici seulement trois améliorations par rapport aux travaux antérieurs de [12] :

• Dans le théorème 1.1, on ne fait pas d'hypothèse sur l'entier $N$. Lorsque $N = 0$, on obtient un résultat de propagation de développements à un seul terme. Lorsque $N \geq 1$, on peut prendre $T' = T$ (voir section 3.2.2). Cela améliore les résultats de [12] qui ne montraient que la propagation de développements ayant un grand nombre de termes.

L'étude concerne aussi des développements de la forme (4) mais avec un "reste" non négligeable devant les profils. La méthode de démonstration fait apparaître un seuil de $\varepsilon^{\frac{1}{4}}$ dans $L^2$ en deça duquel on ne sait plus contrôler le "reste". La preuve repose sur des estimations $\varepsilon$-conormales faisant intervenir des normes $\varepsilon$-conormales à paramètres originales adaptées aux problèmes de couches limites (voir théorème 3.1).

• On traite le problème de Cauchy pour lequel, dans le cas général, des conditions de compatibilité entre données initiales et données au bord sont nécessaires. On analyse des conditions de compatibilité et on montre que l'on peut construire des données compatibles. Les travaux antérieurs ne concernent que le cas d'une solution nulle dans le passé sous l'effet d'un terme source s'allumant à un temps initial.

• L'analyse de [12] fait intervenir un terme $\mathcal{U}_d(t, x, \frac{x_n}{\varepsilon}, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}})$ qui traduit un couplage entre la CLNC et la CLC. En raison de la différence de taille des couches limites, il est possible de supprimer le terme $\mathcal{U}_d$ de l'analyse : le couplage entre les couches respectivement décrites par $\mathcal{U}_b$ et $\mathcal{U}_c$ se fait par les conditions aux limites par l'intermédiaire de $\mathcal{U}_a$ et se traduit par la présence de termes $\mathcal{U}_c$ pour tous les $j$ et non seulement pour les $j$ pairs comme ce serait le cas avec un problème à bord non caractéristique ([18]).

La méthode de démonstration est composée de deux grandes étapes. Dans la premère étape, on résoud la cascade d'équations de profils de la méthode BKW. Dans la deuxième étape, on établit un théorème de stabilité de solutions $\varepsilon$-conormales pour un problème parabolique dans le demi-espace. Dans ce dernier, les estimations $L^\infty$ sont obtenues par un plongement de Sobolev.

Les analogies avec l'optique géométrique à une seule phase sont nombreuses ([14], [11]).

Rappelons que dans le cas d'un bord non caractéristique, l'analyse des couches limites a été poussée au cas quasilinéaire et à des conditions aux limites plus générales [8], [19], [18].

# Table des matières

## 2 Historique

**Dans le cas où l'équation** (1) **est posée dans tout l'espace**, pour chaque $\varepsilon \in [0,1]$, la prescription d'une donnée initiale régulière $u_0^\varepsilon$ à $t = 0$ assure l'existence et l'unicité d'une solution régulière $u^\varepsilon$ de (1) sur un intervalle de temps $(0, T_\varepsilon)$ où $T_\varepsilon > 0$. Une première analyse consiste à considérer une famille de données initiales $(u_0^\varepsilon)_\varepsilon$ ne dépendant pas de $\varepsilon \in [0,1]$. On se pose alors les questions suivantes :

**Q 1** *Existe t-il un réel $T > 0$ tel que pour tout $\varepsilon$ dans $[0,1]$, $T_\varepsilon > T$?*

**Q 2** *Dans quels espaces et si oui à quelle vitesse, $u^\varepsilon$ converge t-elle vers la solution $u^0$ du problème hyperbolique limite*

$$\mathcal{L}^0 u^0 = 0 \tag{7}$$

La réponse à Q2 est oui et $u^\varepsilon$ converge à la vitesse $\varepsilon$ vers $u^0$ dans $H^s((0,T)\times\mathbb{R}^n_+)$ pour tout $s \geqslant 0$. De plus, on peut prendre pour $T$, le temps d'existence $T_0$ de $u^0$, ce qui traduit le fait que toute la nonlinéarité est attrapée par le problème hyperbolique limite. L'estimation de la vitesse de convergence obtenue est optimale. Ces résultats sont dues à [15] en ce qui concerne le système de la mécanique des fluides et à [16] dans le cadre des systèmes hyperboliques quasilinéaires.

On peut aussi décrire, moyennant régularité, des termes correctifs c'est-à-dire des développements BKW de la forme $\sum_{j=0}^N \varepsilon^j\, \mathcal{U}^j(t,x) + O(\varepsilon^{N+1})$, pour tout $N$. Ces résultat s'étendent de la façon suivante à une famille non constante de données initiales :

Si $(u_0^\varepsilon)_\varepsilon$ est une famille de données initiales régulières telle que $u_0^\varepsilon - u_0^0 \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$ dans $H^s$ pour $s = \frac{n}{2} + 1$, alors il existe $T_0 > 0$ et $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ famille de solutions solutions de (1) associées à $(u_0^\varepsilon)_\varepsilon$, où $T_0$ est le temps d'existence de $u^0$. De plus, $u^\varepsilon \to u_0^\varepsilon$ quand $\varepsilon \to 0$ dans $H^s$.

Si $(u_0^\varepsilon)_\varepsilon$ est une famille de données initiales telle que $u_0^\varepsilon = u_0^0 + O(1)$, alors il existe $T > 0$ et $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ famille de solutions de (1) associées à $(u_0^\varepsilon)_\varepsilon$, où $0 < T \leqslant T_0$ et $T_0$ est le temps d'existence de $u^0$. Si $T < T_0$ alors $\limsup_{\varepsilon\to 0^+} ||u^\varepsilon - u^0||_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times(0,t))} \to +\infty$ quand $t \to T$.

**En présence d'un bord**, le problème est plus délicat. Dans le cas linéaire (ie $F$ linéaire en $u$), [1] identifie les conditions au bord pour le problème hyperbolique limite. Afin qu'il soit bien posé dans $L^2$, [24] dégage l'hypothèse 1.1. Les conditions aux limites obtenues sont maximales dissipatives et même strictement dissipatives au sens des problèmes caractéristiques. Ceci est lié au choix d'une viscosité uniformément elliptique. Un exemple de problème mixte hyperbolique strictement dissipatif est donné par le système de Maxwell avec condition d'onde entrante ([5]). Cependant, il faut noter que des exemples naturelles de conditions aux limites conservatives (problèmes de transmission, équations d'Euler linéarisées avec condition de glissement au bord) échappent à cette étude. [3] obtient également la convergence de $u^\varepsilon$ vers $u^0$ dans $H^s$ pour $s < \frac{1}{2}$.

Dans le cadre des solutions régulières de problèmes mixtes, toute donnée initiale n'est pas admissible : certaines conditions de compatibilité au "coin" : $\{t = 0; \quad x_n = 0\}$ doivent être vérifiées. Aussi une simplification agréable consiste à considérer le cas d'une donnée initiale $u_0$ compatible pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$. C'est le cas (physique) d'une solution nulle dans le passé s'allumant en $t = 0$ sous l'effet d'un terme source.

Dans ce cadre et avec une régularité $C^\infty$, O. Guès ([12]) s'attaque au problème semilinéaire . Les résultats de [9] assurant l'existence d'un temps $T_0$ et d'une unique solution $u^0$ de $Pb^0(T_0)$, il met en évidence la présence d'une couche limite qui fait obstruction à la convergence dans $H^{\frac{1}{2}}$ et $L^\infty$ qui est liée à la perte de conditions aux limites. Pour $\varepsilon$ petit, $(Id - \Pi_+)u^\varepsilon$ varie rapidement près du bord, s'éloignent de $(Id - \Pi_+)u^0$. On observe ainsi la discrépance :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{x_n \to 0} u^\varepsilon \neq \lim_{x_n \to 0} \lim_{\varepsilon \to 0} u^\varepsilon.$$

O. Guès dégage deux sortes de couches limites : les CLNC de taille $\varepsilon$ auxquelles on associe la variable rapide $\frac{x_n}{\varepsilon}$ et les CLC de taille $\sqrt{\varepsilon}$ auxquelles on associe la variable intermédiaire $\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}$. Les tailles respectives des couches limites résultent typiquement de la mise en équilibre de $\partial_n$ et $\varepsilon \partial_n^2$ dans le cas non caractéristique et de $\partial_t$ et $\varepsilon \partial_n^2$ dans le cas caractéristique. Il introduit enfin des développements BKW de la forme

$$\sum_{j \geqslant 0} \sqrt{\varepsilon}^j \, \mathcal{U}^j(t, x, \frac{x_n}{\varepsilon}, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}})$$

où $\mathcal{U}^j(t, x, z, \theta) = \mathcal{U}_a^j(t, x) + \mathcal{U}_b^j(t, x, \theta) + \mathcal{U}_c^j(t, x, z) + \mathcal{U}_d^j(t, x, z, \theta)$.
Les termes $\mathcal{U}_d$ peuvent sembler superflus : par un développement de Taylor, on peut écrire $\mathcal{U}_d(t, x, z, \theta) = \mathcal{U}_d(t, x, z, 0) + \theta \mathcal{U}_d^\flat(t, x, z, \theta)$. Puisque $\theta$ correspond à $\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}$ et $z$ à $\frac{x_n}{\varepsilon}$, on peut remplacer formellement $\theta$ par $\sqrt{\varepsilon} z$. De plus, si $\mathcal{U}_d^\flat$ est à décroissance rapide en $z$, $z\mathcal{U}_d^\flat$ l'est encore. Réitérant l'idée, on voit qu'on peut substituer formellement un développement de la forme $\sum_{i \geqslant 0} \sqrt{\varepsilon}^i \, \mathcal{U}_c^i(t, x, \frac{x_n}{\varepsilon})$ à $\mathcal{U}_d$. (cf proposition 5.1)
Une autre conséquence importante de la différence de taille des couches limites est l'effet de la semilinéarité : le comportement de la CLNC est linéaire alors que celui de la CLC ne l'est pas.

O. Gués obtient sur un intervalle de temps $(0, T)$ avec $0 < T \leqslant T_0$ l'existence d'un entier naturel $N_0$ tel que pour tout $N \geqslant N_0$, il existe des profils $(\mathcal{U}^j)_{0 \leqslant j \leqslant N}$

tels que $u^\varepsilon$ soit défini sur $(0,T)$ et que

$$r_N^\varepsilon(t,x) := u^\varepsilon(t,x) - \sum_{j=0}^{N} \sqrt{\varepsilon}^j\, \mathcal{U}^j(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon},\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}})$$

soit petit dans un sens à préciser. Il en déduit que $r_N^\varepsilon$ est petit pour tout $N$ entier naturel et obtient la convergence de $u^\varepsilon - u^0$ dans $H^s((0,T)\times\mathbb{R}^n_+)$ pour $s < \frac{1}{2}$ et montre que $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $H^{\frac{1}{2}}$ et $L^\infty$. Ces estimations sont optimales au sens où $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ peut ne pas converger dans $H^{\frac{1}{2}}$ et $L^\infty$. La cause peut en être une CLC ou une CLNC ou ... les deux. L'argument présente des défauts car il nécessite la construction d'un très grand nombre de profils, ce qui nécessite une très grande régularité et d'autre part s'appuie sur l'existence tacite des profils en temps négatif.

# 3 Les principaux résultats

## 3.1 Notations

La lettre $H$ est utilisée pour désigner les espaces de Sobolev construits sur $L^2$ et $\mathcal{S}$ l'espace des fonctions à décroissance rapide. On note $H^\infty$ l'intersection des $H^s$. On note $\mathbb{R}^n_+ := \mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}_+$ et on utilisera, sauf mention du contraire, $T$ pour désigner un temps strictement positif générique.

La forme de (1) montre qu'une dérivée en temps vaut deux dérivées en espace. On introduit, suivant [18], les espaces de Sobolev anisotropiques suivants :

**Définition 3.1** *Pour $s\in\mathbb{Z}$ et $s \geqslant -1$, on note $\mathcal{H}^s(0,T)$ l'espace des fonctions $u \in L^2((0,T);H^s(\mathbb{R}^n_+))$ telles que pour tout entier naturel $j \leqslant \frac{s+1}{2}$, $\partial_t^j u \in L^2((0,T);H^{s-2j}(\mathbb{R}^n_+))$. En particulier, $\mathcal{H}^{-1} := L^2((0,T),H^{-1}(\mathbb{R}^n_+))$ et $\mathcal{H}^0 := L^2((0,T)\times\mathbb{R}^n_+)$. On note*

$$||u||_{\mathcal{H}^s(0,T)} := \sum_{j\leqslant\frac{s+1}{2}} ||\partial_t^j u||_{L^2((0,T);H^{s-2j}(\mathbb{R}^n_+))}.$$

Les deux paragraphes suivants introduisent les espaces de profils et les familles de reste sous-jacents à la technique de développements asymptotiques BKW qui va être mise en jeu. La philosophie de ces développements est que la viscosité joue près du bord et dans la direction normale un rôle à différentes échelles. On est ainsi amené à introduire deux variables rapides.

### 3.1.1 Espace de profils

Introduisons l'espace de profils

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\Omega_T) := \{&\mathcal{U}(t,x,z,\theta) = \mathcal{U}_a(t,x) + \mathcal{U}_b(t,x,\theta) + \mathcal{U}_c(t,x,z) \quad \text{où} \\ &\mathcal{U}_a \in H^\infty(\Omega_T),\quad \mathcal{U}_b \in H^\infty(\Omega_T,\mathcal{S}(\mathbb{R}^+_\theta)) \quad \text{et} \quad \mathcal{U}_c \in H^\infty(\Omega_T,\mathcal{S}(\mathbb{R}^+_z))\}.\end{aligned}$$

On abrége en

$$\mathcal{P}(\Omega_T) := H^\infty(\Omega_T) \oplus H^\infty(\Omega_T, \mathcal{S}(\mathbb{R}^+_\theta)) \oplus H^\infty(\Omega_T, \mathcal{S}(\mathbb{R}^+_z)).$$

$\mathcal{U}_a$ est la partie régulière ou intérieur du profil, $\mathcal{U}_b$ est un terme de couche limite caractéristique et $\mathcal{U}_c$ un terme de couche limite non caractéristique. On verra que la décroissance en $z$ des $\mathcal{U}_c$ peut être précisée (proposition 5.4).

On considère un espace analogue pour les conditions initiales :

$$\mathcal{P}_{init} := H^\infty(\mathbb{R}^n_+) \oplus H^\infty(\mathbb{R}^n_+, \mathcal{S}(\mathbb{R}^+_\theta)) \oplus H^\infty(\mathbb{R}^n_+, \mathcal{S}(\mathbb{R}^+_z)).$$

### 3.1.2 Familles à un paramètre

On note $\partial_0 := \partial_t$, pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$, $Z_i := \partial_i$ et $Z_n := h(x_n)\partial_n$ où $h$ est une fonction $C^\infty$ bornée sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}^*_+$, telle que $h(x_n) = x_n$ quand $0 \leqslant x_n \leqslant 1$. $Z := (Z_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille génératrice de l'algèbre des champs de vecteurs $C^\infty$ tangents à $\{x_n = 0\}$. On note $Z' := (Z_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

On définit pour $s \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon_0 \in ]0,1]$, les normes

$$||u||_{H^s_{co}(\mathbb{R}^n_+)} := \sum_{j \leqslant s} ||Z'^j u||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)},$$
$$||u||_{\mathcal{H}^s_{co}(0,T)} := \sum_{j \leqslant \frac{s+1}{2}} ||\partial_t^j u||_{L^2((0,T);H^{s-2j}_{co}(\mathbb{R}^n_+))},$$

et les ensembles

$$\Lambda^s(T) := \{(u^\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1]} \in (\mathcal{H}^s(0,T))^{]0,1]} /$$
$$\sup_{\varepsilon \in ]0,1]} (||u^\varepsilon||_{\mathcal{H}^s_{co}(0,T)} + \sum_{k=1}^s \varepsilon^{k-\frac{1}{2}} ||\partial_n^k u^\varepsilon||_{\mathcal{H}^{s-k}_{co}(0,T)}) < \infty\}$$
$$\Lambda^s_{init} := \{(u^\varepsilon_0)_{\varepsilon \in ]0,1]} \in (H^s(\mathbb{R}^n_+))^{]0,1]} /$$
$$\sup_{\varepsilon \in ]0,1]} (||u^\varepsilon_0||_{H^s_{co}(\mathbb{R}^n_+)} + \sum_{k=1}^s \varepsilon^{k-\frac{1}{2}} ||\partial_n^k u^\varepsilon_0||_{H^{s-k}_{co}(\mathbb{R}^n_+)}) < \infty\}.$$

Remarquons que $\Lambda^s(T)$ est un ensemble de familles de fonctions (à un paramètre) adapté au problème puisque si $\mathcal{U} \in \mathcal{P}(\Omega_T)$ alors la famille $(u^\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1]}$ définie par

$$u^\varepsilon(t,x) := \mathcal{U}(t, x, \frac{x_n}{\varepsilon}, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}) \tag{8}$$

est pour tout $s \in \mathbb{N}$ dans $\Lambda^s(T)$. Insistons notamment sur le fait qu'un profil de CLNC est un $O(\sqrt{\varepsilon})$ dans $L^2$ alors qu'un profil de CLC est un $O(\varepsilon^{\frac{1}{4}})$.

Ainsi si l'on dispose d'un développement

$$w^\varepsilon(t,x) := \sum_{j=0}^{N} \sqrt{\varepsilon}^j\, \mathcal{U}^j(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon},\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}), \tag{9}$$

on peut écrire, pour $0 \leqslant N' \leqslant N$,

$$w^\varepsilon(t,x) := \sum_{j=0}^{N'} \sqrt{\varepsilon}^j\, \mathcal{U}^j(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon},\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}) + \sqrt{\varepsilon}^{N'+1} r_\varepsilon(t,x) \tag{10}$$

avec $r_\varepsilon \in \Lambda^s(T)$, pour tout $s \in \mathbb{N}$.

On se servira également de normes adaptées aux estimations $\varepsilon$-conormales construites sur $L^\infty$. Soient

$$\mathcal{A}^m(T) := \{(a_\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]} \in W^{m,\infty}(\Omega_T)/ \quad \forall 2j+k+l \leqslant m$$
$$\sup_{\varepsilon\in]0,1]} ||(\varepsilon\partial_n)^k Z'^l \partial_t^j u^\varepsilon||_{L^\infty(\Omega_T)} < \infty\}.$$

Notons que si $\mathcal{U} \in \mathcal{P}(\Omega_T)$ alors la famille $(a^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ définie par

$$a^\varepsilon(t,x) := \mathcal{U}(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon},\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}) \tag{11}$$

est dans $\mathcal{A}^m(T)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Enfin, on définit pour $s \in \mathbb{N}$, l'ensemble

$$\mathcal{H}^s(T) := \{(u^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]} \in (\mathcal{H}^s(0,T))^{]0,1]}/$$
$$\sup_{\varepsilon\in]0,1]} (\sum_{k=0}^{s} \varepsilon^k ||\partial_n^k u^\varepsilon||_{\mathcal{H}^{s-k}_{co}(0,T)}) < \infty\}.$$

## 3.2 Enoncés

On notera dans la suite $m := 2s+2 > \frac{n}{2}$.

### 3.2.1 Théorème d'approximation

La philosophie du prochain théorème est la suivante : on suppose connue une famille de solutions approchées des problèmes $(Pb^\varepsilon(T))_\varepsilon$, pour $T > 0$, et on s'intéresse au prolongement d'une famille de solutions exactes, proche, sur $(0,T_0); 0 < T_0 < T$, de cette famille de solutions approchées. Il faut bien comprendre que l'écart entre les deux familles, approchées et exactes, est mesuré de deux façons : directement et par l'intermédiaire du résidu produit dans l'équation par la substitution de la solution approchée à la solution exacte. Les normes utilisées sont respectivement celles de $\Lambda^m$ et $\mathcal{H}^m$. Elles mettent en évidence une direction singulière : $x_n$ pour laquelle une dérivation coûte, au pire, $\frac{1}{\varepsilon}$. On parle d'estimations $\varepsilon$-conormales. Cette approche présente certains aspects communs avec [10]. Il s'agit cependant ici d'un problème dans le demi espace, avec une viscosité $\varepsilon\mathcal{E}$ et contrairement au cas des oscillations, les couches limites sont petites dans $L^2$. Par ailleurs, si les théorèmes de [10] utilisent des estimations $L^\infty$, dans ce qui suit le contrôle uniforme en $\varepsilon$ de la norme $L^\infty$ se fera **au cours de la preuve** à l'aide d'un plongement Sobolev, au prix de la perte d'un facteur $\varepsilon^{\frac{1}{4}}$. L'exemple donné après la proposition 6.4 montre que l'on ne peut espérer mieux par cette méthode.

**Théorème 3.1** *Soit $M$ un réel tel que $M \geqslant \frac{1}{4}$ et $0 < T_0 < T$. Soit $(a^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]} \in \mathcal{A}^m(T)$ et $(r^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]} \in \Lambda^m(T_0)$ tels que la famille $(u^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ définie par*

$$u^\varepsilon(t,x) = a^\varepsilon(t,x) + \varepsilon^M r_\varepsilon(t,x) \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_{T_0} \tag{12}$$

*soient solutions des problèmes $(Pb^\varepsilon(T_0))_{\varepsilon\in]0,1]}$ et que $(\varepsilon^{-M}\mathcal{L}^\varepsilon a^\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{H}^m(T)$ et*

$$a^\varepsilon = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T.$$

*Alors il existe $\varepsilon_0 \in ]0,1]$ et un temps $T'$ dans $]T_0,T]$ tel que pour tout $\varepsilon \in ]0,\varepsilon_0]$, $u^\varepsilon$ se prolonge de manière unique en une solution régulière de $Pb^\varepsilon(T')$ qui s'écrit encore sous la forme* (12) *avec $(r^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]} \in \Lambda^m(T')$. Si $M > \frac{1}{4}$, on peut prendre $T' = T$.*

La preuve de ce résultat est donnée dans la section 6.

### 3.2.2 Propagation de développements de couche limite

Dans la suite, on va s'intéresser aux cas où la famille $(a^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ est donnée par un développement de la forme

$$a^\varepsilon(t,x) := \sum_{j=0}^{N} \sqrt{\varepsilon}^j\, \mathcal{U}^j(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon},\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}) \tag{13}$$

où les profils $\mathcal{U}^j$ sont dans $\mathcal{P}(\Omega_T)$. On identifiera, à la section 5.5, une cascade d'équations $(S^j(T))$ et de conditions aux limites $(S^j_{cl}(T))$ naturellement associées aux profils $\mathcal{U}^j$. On prouvera notamment, pour cette suite de problème, le résultat de propagation suivant :

**Théorème 3.2** *Soit $N$ un entier naturel, $0 < T_0 < T$. Supposons que les profils $(\mathcal{U}^j)_{0\leqslant j\leqslant N}$ soient dans $\mathcal{P}(\Omega_{T_0})$, vérifient les problèmes $(S^j(T_0))$-$(S^j_{cl}(T_0))$, pour $0 \leqslant j \leqslant N$. Alors il existe un temps $T'$ dans $]T_0,T]$ et des prolongements des profils $(\mathcal{U}^j)_{0\leqslant j\leqslant N}$ en des fonctions de $\mathcal{P}(\Omega_{T'})$ vérifiant les problèmes $(S^j(T'))$-$(S^j_{cl}(T'))$, pour $0 \leqslant j \leqslant N$.*

Ce théorème est assorti du principe d'explosion suivant :

**Théorème 3.3** *Soit* $T^* := \sup\{T'$ *dans* $]T_0, T]$ *tel qu'ils existent des prolongements des profils* $(\mathcal{U}^j)_{0\leqslant j\leqslant N}$ *en des fonctions de* $\mathcal{P}(\Omega_{T'})$ *vérifiant* $(S^j(T'))$-$(S^j_{cl}(T'))$*, pour* $0 \leqslant j \leqslant N$ $\}$*. Si* $T^* < T$ *alors on a* $||\mathcal{U}^0_a||_{L^\infty(\Omega_t)} + ||\mathcal{U}^0_b||_{L^\infty(\Omega_t\times\mathbb{R}_+)} \to +\infty$ *quand* $t \to T^*$.

Une propriété essentielle des problèmes $(S^j(T_0))$-$(S^j_{cl}(T_0))$ est résumée dans le théorème suivant :

**Théorème 3.4** *Soit* $N \in \mathbb{N}$ *et* $T > 0$*. Soit* $(\mathcal{U}^j)_{0\leqslant j\leqslant N}$ *une famille de profils dans* $\mathcal{P}(\Omega_T)^{N+1}$ *vérifiant les problèmes* $(S^j(T))_{0\leqslant j\leqslant N}$ *et* $(S^j_{cl}(T))_{0\leqslant j\leqslant N}$*. Alors la famille* $(a^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ *définie par* (13) *vérifie*

$$\mathcal{L}^\varepsilon a^\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}^N R_\varepsilon \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_T \tag{14}$$

$$a^\varepsilon = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T \tag{15}$$

*où* $R_\varepsilon \in \mathcal{H}^m(T)$*, pour tout entier naturel* $m$.

Signalons également la réciproque partielle suivante, qui met en évidence la pertinence des équations $(S^j(T))_{0\leqslant j\leqslant N}$ :

**Théorème 3.5** *Soit* $N \in \mathbb{N}$ *et* $T > 0$*. Soit* $(\mathcal{U}^j)_{0\leqslant j\leqslant N}$ *une famille de profils dans* $\mathcal{P}(\Omega_T)^{N+1}$ *telle que la famille* $(a^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ *définie par* (13) *vérifie* (14)*. Alors les* $(\mathcal{U}^j)_{0\leqslant j\leqslant N}$ *vérifient les équations* $(S^j(T))_{0\leqslant j\leqslant N}$.

*Preuve.* Le théorème découle facilement de la proposition 5.1 et du lemme suivant :

**Lemme 3.1** *Soit* $N \in \mathbb{N}$*,* $T$ *un temps strictement positif et des profils* $(U^j)_{0\leqslant j\leqslant N} \in \mathcal{P}(\Omega_T)^{N+1}$*. Notons* $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ *la famille définie par*

$$u^\varepsilon(t,x) := \sum_{j=0}^{N} \sqrt{\varepsilon}^j\, \mathcal{U}^j(t, x, \frac{x_n}{\varepsilon}, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}).$$

*Si* $u^\varepsilon$ *est identiquement nulle alors chacun des profils est nul.* $\square$

Pour des raisons techniques, on a pas de réciproque aussi simple en ce qui concerne les conditions aux limites $(S^j_{cl}(T))_{0\leqslant j\leqslant N}$. (cf section 5.5) Le théorème 3.4, qui sera lui prouver dans la section 5, permet d'appliquer le théorème d'approximation 3.1 à la stabilité de familles $(u^\varepsilon)$ de solutions des problèmes $Pb^\varepsilon(T_0)$ de la forme (12) avec $a^\varepsilon$ admettant une écriture de la forme (13) et $(r^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]} \in \Lambda^m(T_0)$. Plusieurs cas sont à distinguer selon le nombre de profils $(\mathcal{U}^j)_{0\leqslant j\leqslant N}$ et la taille du reste $\varepsilon^M r_\varepsilon$.

• Supposons $\frac{1}{4} \leqslant M \leqslant \frac{N}{2}$. Il existe $\varepsilon_0 \in ]0,1]$ et un temps $T'$ dans $]T_0, T]$ tel que pour tout $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$, $u^\varepsilon$ se prolonge de manière unique en une solution régulière de $Pb^\varepsilon(T')$ qui s'écrit encore sous la forme (12) avec $a^\varepsilon$ de la forme (13), où les profils

$(\mathcal{U}^j)_{0\leqslant j\leqslant N}$ ont été prolongés en des fonctions de $\mathcal{P}(\Omega_{T'})$, et $(r^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]} \in \Lambda^m(T')$. De plus, si $M > \frac{1}{4}$, on peut prendre $T' = T$.

• Supposons que $0 < \frac{N}{2} < M$ alors la famille $(u^\varepsilon)$ se prolonge en une famille de solutions des problèmes $Pb^\varepsilon(T)$ de la forme

$$u^\varepsilon(t,x) = a^\varepsilon(t,x) + \varepsilon^{\frac{N}{2}}\, r_\varepsilon(t,x)$$

avec $a^\varepsilon$ de la forme (13), où les profils $(\mathcal{U}^j)_{0\leqslant j\leqslant N}$ ont été prolongés en des fonctions de $\mathcal{P}(\Omega_T)$, et $(r^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]} \in \Lambda^m(T)$.

• Tournons maintenant notre attention vers les développements à un seul terme. Dans le cas général : $N = 0$, $M \geqslant \frac{1}{4}$, on peut conclure qu'il existe $\varepsilon_0 \in ]0,1]$ et un temps $T'$ dans $]T_0, T]$ tel que pour tout $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$, $u^\varepsilon$ se prolonge de manière unique en une solution régulière de $Pb^\varepsilon(T')$ qui s'écrit encore sous la forme

$$u^\varepsilon(t,x) = \mathcal{U}^0(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon},\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}) + \varepsilon^{\frac{1}{4}}\, r_\varepsilon(t,x).$$

où le profil $\mathcal{U}^0$ est prolongé en une fonction de $\mathcal{P}(\Omega_{T'})$, et $(r^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]} \in \Lambda^m(T')$.

Dans les deux cas extrêmes $d_0 = 0$ (bord non caractéristique) et $d_0 = L$ (bord totalement caractéristique), on peut apporter certaines précisions. En premier lieu, la famille $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ peut s'écrire

$$u^\varepsilon(t,x) = a^\varepsilon(t,x) + \varepsilon^{min(M,\frac{1}{2})}\, r_\varepsilon(t,x)$$

avec $(r^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]} \in \Lambda^m(T')$. Ensuite, dans le cas où $M > \frac{1}{4}$, on peut prendre $T' = T$. Ces résultats découlent du raffinement suivant du théorème 3.4 pour la construction d'un seul profil (cf section 5).

**Théorème 3.6** *Si $\mathcal{U}^0 \in \mathcal{P}(\Omega_T)$ vérifiant $(S^0(T))$ et $(S^0_{cl}(T))$ alors la famille $(a^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ définie par $a^\varepsilon(t,x) = \mathcal{U}^0(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon},\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}})$ vérifie*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\varepsilon a^\varepsilon &= \varepsilon^{\frac{1}{4}}\, R_\varepsilon \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_T \\ a^\varepsilon &= 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T \end{aligned}$$

*et $R_\varepsilon \in \mathcal{H}^m(T)$, pour tout $m$ entier naturel.*
*Dans le cas où $d_0$ vaut $0$ où $L$, on a que la famille $(\varepsilon^{-\frac{1}{4}} R_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{H}^m(T)$.*

Notons que dans le cas où $d_0 = 0$, la méthode de [18] fait recours à la construction de $\mathcal{U}^1_c$, ce que l'on ne fait pas ici. Cela se fait au prix d'un manque d'information sur la taille du reste. On verra à la section suivante comment la construction de profils supplémentaires peut préciser ce point dans les cas $0 < \frac{N}{2} < M$ et $N = 0$, $M > \frac{1}{4}$. Constatons que les cas les plus délicats sont ceux où il y a à la fois une CLC et une CLNC. La difficulté provient de leur interaction et plus particulièrement du terme de CLNC d'amplitude $O(\sqrt{\varepsilon})$ (dans $L^\infty$).

### 3.2.3 Existence de développements de couche limite

On s'intéressera pour une famille de données initiales $(u_0^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ à la famille de problèmes mixtes paraboliques :

$$Pb_{mixte}^\varepsilon(T) : \begin{cases} \mathcal{L}^\varepsilon u^\varepsilon = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_T \\ u^\varepsilon = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T \\ u^\varepsilon = u_0^\varepsilon \quad \text{quand } t = 0 \end{cases}$$

Dans la suite et jusqu'au théorème 3.8, $\varepsilon \in ]0,1]$ est fixé.

Pour qu'il soit possible d'obtenir une solution régulière, des relations de compatibilité entre données initiales et au bord doivent être vérifiées. A l'ordre 0, cela donne

$$(R_0^\varepsilon) : \quad u_0^\varepsilon|_{x_n=0} = 0.$$

De plus, notant $A(t,x,\partial_x) := \sum_{1\leqslant j\leqslant n} A_j(t,x)\partial_j$, (1) peut se réecrire

$$A_0\partial_t u^\varepsilon = -(A - \varepsilon\mathcal{E})u^\varepsilon + F(t,x,u^\varepsilon) + f(t,x) \tag{16}$$

$\partial_t u^\varepsilon$, et par conséquent aussi les dérivées temporelles d'ordres supérieurs, peuvent ainsi se réexprimer en fonction des dérivées spatiales. Ainsi si à la donnée initiale $u_0^\varepsilon$ correspond une solution régulière $u^\varepsilon$ de (16), les $\partial_t^j u^\varepsilon|_{t=0}$ sont déterminés univoquement en fonction de $u_0^\varepsilon$ et des données du système. On peut donc introduire **à priori** sans ambiguité les valeurs $u_j^\varepsilon$ attendues pour $\partial_t^j u^\varepsilon|_{t=0}$. On définit alors la relation de compatibilité à l'ordre $j$

$$(R_j^\varepsilon) : \quad u_j^\varepsilon|_{x_n=0} = 0.$$

Pour que cette dernière ait un sens, on doit se pencher sur la régularité des $u_j^\varepsilon$. Pour cela, on note pour $j \geqslant 1$, $f_j := (\partial_t^j f)|_{t=0}$ et on introduit les fonctions $\mathcal{F}_j$ telles que pour tout $u(t,x)$

$$(\partial_t^j F(t,x,u))_{t=0} = \mathcal{F}_j(x, u_0, ..., u_j)$$

où $u_j = \partial_t^j u|_{t=0}$. Les $\mathcal{F}_j$ sont des fonctions de la forme

$$\mathcal{F}_j(x, u_0, ..., u_j) = \sum_{k=1} \sum_{j_1+...+j_k=j} cF^k(x,u_0)(u_{j_1}, ..., u_{j_k})$$

où la somme ne porte que sur des $j_1, ..., j_k \geqslant 1$.

La proposition suivante, dont la démonstration repose essentiellement sur les propriétés multiplicatives des espaces de Sobolev, assure que les $u_j^\varepsilon$ possèdent une régularité suffisante pour qu'un certain nombre de relations $(R_j^\varepsilon)_j$ (que le théorème 3.7 révèlera suffisant) aient un sens :

**Proposition 3.1** *Si la donnée initiale* $u_0^\varepsilon \in H^{2s+1}(\mathbb{R}^n_+)$ *et* $f \in \mathcal{H}^{2s}(0,+\infty)$ *avec* $2s > \frac{n}{2}$, *les formules*

$$A_0|_{t=0}u_1^\varepsilon = -(A - \varepsilon\mathcal{E})|_{t=0}u_0^\varepsilon + F(0,x,u_0) + f(0,x),$$

*et pour* $j \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} A_0|_{t=0}u_j^\varepsilon = -(\partial_t^{j-1}A_0)|_{t=0}u_1^\varepsilon - (\partial_t^{j-1}(A-\varepsilon\mathcal{E}))|_{t=0}u_0^\varepsilon \\ -(A-\varepsilon\mathcal{E})|_{t=0}u_{j-1}^\varepsilon + f_{j-1} + \mathcal{F}_{j-1}(x, u_0^\varepsilon, ..., u_{j-1}^\varepsilon) \end{aligned}$$

*définit par récurrence* $u_j^\varepsilon \in H^{2s+1-2j}(\mathbb{R}^n_+)$ *pour* $j \leqslant s$.

Par la théorie variationnelle, on a (voir [18] pour une démonstration dans le cas de coefficients constants) :

**Théorème 3.7** *Soit* $\varepsilon \in ]0,1]$. *Si* $u_0^\varepsilon \in H^{2s+1}(\mathbb{R}^n_+)$ *et* $f \in \mathcal{H}^{2s}(0,\infty)$ *avec* $2s > \frac{n}{2}$, *alors les assertions suivantes sont équivalentes :*
1. *La fonction* $u_0^\varepsilon$ *vérifie les relations* $(R_j^\varepsilon)_{j\leqslant s}$
2. *Il existe* $T_\varepsilon > 0$ *et* $u^\varepsilon$ *unique solution de* $Pb_{mixte}(T_\varepsilon)$ *dans* $\mathcal{H}^m(0,T_\varepsilon)$
*De plus, lorsque* 2 *est vérifiée avec un* $T_\varepsilon$ *maximal, on a si* $T_\varepsilon < \infty$ *que*

$$\lim_{t\to T_\varepsilon} ||u^\varepsilon||_{L^\infty(\Omega_t)} = +\infty.$$

*Dans le cas linéaire ,* $T_\varepsilon = +\infty$.

Le théorème n'est jamais vide puisque :

**Proposition 3.2** *Pour tout* $\varepsilon \in ]0,1]$ *et* $f \in \mathcal{H}^{2s}(0,\infty)$ *avec* $2s > \frac{n}{2}$, *il existe* $u_0^\varepsilon \in H^{2s+1}(\mathbb{R}^n_+)$ *vérifiant* $(R_k^\varepsilon)_{k\leqslant s}$. *De plus,* $u_0^\varepsilon$ *peut être construit explicitement.*

*Preuve.* Il existe des fonctions $(\mathcal{H}_j)_{j\geqslant 1}$ dépendantes de façon $C^\infty$ de leurs arguments tels que (16) impose, pour tout $x \in \mathbb{R}^n_+$,

$$u_j^\varepsilon(x) = \varepsilon^j(A_0^{-1}E_{n,n})^j(0,x)\partial_n^{2j}u_0^\varepsilon(x) + \mathcal{H}_j(\varepsilon, x, (\partial^\alpha u_0^\varepsilon(x))_{|\alpha|\leqslant 2j;\alpha_n\neq 2j})$$

On construit une suite $(a_j^\varepsilon)_{j\leqslant 2s} \in L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ telle que, pour tout $y \in \mathbb{R}^{n-1}$,

$$\begin{aligned} a_0^\varepsilon(y) = 0 \quad \text{et} \quad \text{pour} \quad j \geq 1, \\ \varepsilon^j(A_0^{-1}E_{n,n})^j(0,y,0)a_{2j}^\varepsilon(y) + \mathcal{H}_j(\varepsilon, y, 0, (\partial^{\alpha'}a_{\alpha_n}^\varepsilon(y))_{|\alpha|\leqslant 2j;\alpha_n\neq 2j}) = 0 \end{aligned}$$

où $\alpha := (\alpha', \alpha_n)$. L'application linéaire continue surjective

$$\begin{aligned} S : H^{2s+1}(\mathbb{R}^n) \to \Pi_{j=0}^{2s} H^{2s+\frac{1}{2}-j}(\mathbb{R}^{n-1}) \\ u_0 \mapsto (u_0|_{x_n=0}, ..., \partial_n^{2s}u_0|_{x_n=0}) \end{aligned}$$

admet un inverse à droite linéaire continue $R$ explicite ([13]). On pose $u_0^\varepsilon := R(a_0^\varepsilon, a_1^\varepsilon, ..., a_{2s}^\varepsilon)$. La fonction $u_0^\varepsilon$ vérifie les relations de compatibilité $(R_j^\varepsilon)_{j\leqslant s}$. □
La démonstration précédente assure le résultat de caractérisation des données initiales compatibles suivant :

**Proposition 3.3** *Ils existent des fonctions* $(C_j)_{j\leqslant 2s}$*, de classe* $C^\infty$*, telles que pour tout* $\varepsilon \in ]0,1]$*, pour toute donné initiale* $u_0^\varepsilon \in H^m(\mathbb{R}^n_+)$*, les assertions suivantes sont équivalentes :*
1. *La fonction* $u_0^\varepsilon$ *vérifie les relations de compatibilité* $(R_j^\varepsilon)_{k\leqslant s}$*,*
2. *La fonction* $u_0^\varepsilon$ *vérifie*

$$u_0^\varepsilon|_{x_n=0} = 0 \quad \text{et} \quad \text{pour} \quad j \geqslant 1,$$
$$(\partial_n^{2j} u_0^\varepsilon)|_{x_n=0} = C_j(\varepsilon, y, ((\partial_x^\alpha u_0^\varepsilon)|_{x_n=0})_{\alpha\in I_j}),$$

*où* $I_j := \{\alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| \leqslant 2j,\ \alpha_n \neq 2j\}$.

Il est possible d'obtenir à partir des théorèmes précédents des résultats uniforme en $\varepsilon$ en utilisant le changement d'échelle $(t', x') = (\varepsilon t, \varepsilon x)$ (voir [18]). Cependant cette méthode ne conduit pas à des estimations optimales car elle ne tient pas compte du fait que la singularité est seulement selon la direction normale.

Le théorème suivant montre que l'on peut résoudre la famille de problèmes mixtes $Pb^\varepsilon_{mixte}$, sur un intervalle de temps non trivial, commun à toute une gamme de $\varepsilon$ petits, pour une famille de données initiales sous la forme d'un développement de couche limite " bien préparée".

**Théorème 3.8** *Soit* $N$ *un entier naturel,* $M$ *un réel vérifiant* $M \geqslant \frac{1}{4}$*,* $(\mathcal{U}^j_{init})_{0\leqslant j\leqslant N}$ *une famille de profils initiaux dans* $(\mathcal{P}_{init})^{N+1}$ *et* $(r_\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ *une famille de restes initiaux* $\Lambda^m_{init}$*. On note pour* $\varepsilon$ *dans* $]0,1]$ *et* $x$ *dans* $\mathbb{R}^n_+$*,*

$$u_0^\varepsilon(x) := \sum_{j=0}^{N} \sqrt{\varepsilon}^j\, \mathcal{U}^j_{init}(x, \frac{x_n}{\varepsilon}, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}) + \varepsilon^M\, r_\varepsilon(x) \tag{17}$$

*Il existe* $\mathcal{P}_{init,N} \subset (\mathcal{P}_{init})^{N+1}$ *tel que les assertions suivantes soient équivalentes :*
1. *La famille de données initiales est bien préparée au sens suivant :*
*(i).* $(\mathcal{U}^j_{init})_{0\leqslant j\leqslant N} \in \mathcal{P}_{init,N}$
*(ii). Pour tout* $\varepsilon \in ]0,1]$*, la donnée initiale* $u_0^\varepsilon$ *vérifie les relations de compatibilité* $(R_k^\varepsilon)_{k\leqslant s}$
2. *Il existe* $\varepsilon_0 \in ]0,1]$ *et un temps* $T > 0$ *tel que, pour tout* $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$*, le problème mixte* $Pb^\varepsilon_{mixte}(T)$ *admet une unique solution* $u^\varepsilon$ *de la forme*

$$u^\varepsilon(t,x) = \sum_{j=0}^{N} \sqrt{\varepsilon}^j\, \mathcal{U}^j(t, x, \frac{x_n}{\varepsilon}, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}) + \varepsilon^M\, r_\varepsilon(t,x) \tag{18}$$

*où les profils* $(\mathcal{U}^j)_{0\leqslant j\leqslant N}$ *sont dans* $\mathcal{P}(\Omega_T)$*, vérifient les problèmes* $(S^j(T))$*-*$(S^j_{cl}(T))$ *et le reste* $(r_\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ *est dans* $\Lambda^m(T)$*.*

Notons que dans le cas où $M > \frac{N+1}{2}$, on peut déduire du théorème 3.5 le fait que, dans le point 2, les profils $(\mathcal{U}^j)_{0\leqslant j\leqslant N}$ satisfont automatiquement les équations $(S^j(T))$. Le sous-ensemble $\mathcal{P}_{init,N}$ est caractérisé par deux types de relations de compatibilité : d'une part une compatibilité au coin $\{t = x_n = 0\}$ et d'autre part une compatibilité à la polarisation. Un cas analogue est traité dans [28]. La proposition suivante établit l'existence de données initiales bien préparées. En fait, le résultat est même un peu plus précis.

**Proposition 3.4** 1. *Pour tout $N$ entier naturel, l'ensemble $\mathcal{P}_{init,N}$ est non vide.*
2. *Si la famille (ordonnée) $(\mathcal{U}^j_{init})_{0\leqslant j\leqslant N+1}$ est dans $\mathcal{P}_{init,N+1}$, alors la sous-famille $(\mathcal{U}^j_{init})_{0\leqslant j\leqslant N}$ est dans $\mathcal{P}_{init,N}$.*
3. *Si $(\mathcal{U}^j_{init})_{0\leqslant j\leqslant N}$ est dans $\mathcal{P}_{init,N}$, alors il existe $\mathcal{U}^{N+1}_{init} \in \mathcal{P}_{init}$ tel que $(\mathcal{U}^j_{init})_{0\leqslant j\leqslant N+1}$ est dans $\mathcal{P}_{init,N+1}$.*
4. *Pour tout $N$ entier naturel, pour tout réel $M \geqslant \frac{1}{4}$, quelque soit la famille $(\mathcal{U}^j_{init})_{0\leqslant j\leqslant N}$ de profils initiaux dans $(\mathcal{P}_{init})^{N+1}$, il existe une famille de restes initiaux $(r_\varepsilon)_\varepsilon$ dans $\cap_{m\in\mathbb{N}}\Lambda^m_{init}$ tel que pour tout $\varepsilon \in ]0,1]$, la donnée initiale $u^\varepsilon_0$ définie par* (17) *vérifie les relations de compatibilité $(R^\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$.*

La preuve de la proposition 3.4 fait l'objet de la section 7.

Notons que c'est par paresse que l'on considère des profils de régularité $H^\infty$. Une étude similaire avec des profils de régularité finie en les variables "lentes" est tout à fait possible...mais laborieuse.

**Remarque 3.1** *Si $n = L = 1$, $\mathcal{H} := \partial_t$, $F(t,x,u) = u^2$ et $\mathcal{E} := \partial^2_x$, $\mathcal{U}^0_{a,init} := 0$ et $\mathcal{U}^0_{b,init}$ assez grand est un exemple de données initiales pour lesquelles le temps d'existence de $\mathcal{U}^0_b$ est inférieur à celui de $\mathcal{U}^0_a$. Il serait intéressant de savoir si un tel exemple est possible lorsqu'on part de données initiales nulles.*

• Revenons au cas déjà envisagé plus haut où $N = 0$ et $M > \frac{1}{4}$. On ne fait pas ici d'hypothèse supplémentaire sur la multiplicité $d_0$. Supposons que l'on dispose d'une famille $(u^\varepsilon)$ de solutions des problèmes $Pb^\varepsilon(T_0)$ de la forme (12) avec $a^\varepsilon$ de la forme

$$a^\varepsilon(t,x) := \mathcal{U}^0(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon},\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}).$$

Les résultats précédents nous permettent de construire des profils supplémentaires. Rappelons cependant qu'en général, construire un profil consomme de la régularité. Ainsi si l'on s'autorise à construire $\mathcal{U}^1$, on peut alors appliquer le théorème 3.1, prendre $T' = T$ et l'on est assuré de l'existence de prolongements $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ en des solutions des $Pb^\varepsilon(T)$ de la forme

$$u^\varepsilon(t,x) = a^\varepsilon(t,x) + \varepsilon^{min(M,\frac{1}{2})}\, r_\varepsilon(t,x).$$

Si l'on s'autorise à construire $\mathcal{U}^1$, ..., $\mathcal{U}^N$ avec $\frac{N}{2} > M$ alors on est assuré que les $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ sont de la forme

$$u^\varepsilon(t,x) = a^\varepsilon(t,x) + \varepsilon^M\, \tilde{r}_\varepsilon(t,x).$$

• De même dans le cas $0 < \frac{N}{2} < M$, on peut construire $\mathcal{U}^{N+1}$, ..., $\mathcal{U}^k$ avec $\frac{k}{2} \geqslant M$, de façon à être assuré que les $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ soient de la forme

$$u^\varepsilon(t,x) = a^\varepsilon(t,x) + \varepsilon^M \, r_\varepsilon(t,x).$$

Détaillons un peu plus ce cas : l'assertion 2 implique 1 du théorème 3.8 assure que $(\mathcal{U}^j_{init})_{0\leqslant j\leqslant N} \in \mathcal{P}_{init,N}$, où, pour $0 \leqslant j \leqslant N$,

$$\mathcal{U}^j_{init} := \mathcal{U}^j|_{t=0}.$$

Par application répétée du point 3 de la proposition 3.4, on peut construire $\mathcal{U}^{N+1}_{init}$, ..., $\mathcal{U}^k_{init}$ telle que $(\mathcal{U}^j)_{0\leqslant j\leqslant k} \in \mathcal{P}_{init,k}$. On définit alors

$$\tilde{r}_\varepsilon(t,x) := r_\varepsilon(t,x) + \varepsilon^{-M}. \sum_{j=N+1}^{k} \sqrt{\varepsilon}^j \, \mathcal{U}^j(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon},\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}})$$

et on applique l'assertion 1 implique 2 du théorème 3.8. Le théorème 3.3 dit que les profils supplémentaires ainsi construits vivent jusqu'au temps $T$. Le reste est suffisamment petit pour que l'on soit assuré de la persistence du développement jusqu'au temps $T$.

### 3.2.4 Condition aux limites résiduelles

La proposition suivante fait le lien entre $\mathcal{U}^0_a$ et le problème hyperbolique limite avec condition aux limites résiduelles.

**Proposition 3.5** *La fonction $\mathcal{U}^0_a$ vérifie $Pb^0(T_0)$. On notera $u^0 := \mathcal{U}^0_a$.*

Dans la suite, on utilise la notation $\mathring{.}$ pour désigner la restriction à $\Gamma$ d'une fonction définie sur $\Omega$. Le problème hyperbolique limite $Pb^0$ est bien posé en vertu des résultats suivants sur une classe plus vaste de problèmes. On considère le problème :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{H}u = F(t,x,u) + f(t,x) & \text{quand } (t,x) \in \Omega_T \\ M(t,y)u = g(t,y) & \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T \end{array} \right. \tag{19}$$

où les matrices $M(t,y)$ sont des matrices de taille $L \times r$, dépendantes de façon $C^\infty$ de $(t,y)$, de rang constant égal à $r$, où $0 \leqslant r \leqslant L$. La fonction $g$ est supposée $H^\infty$ sur $\Gamma_T$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^r$. On fait, en plus de l'hypothèse 1.1, l'hypothèse :

**Hypothèse 3.1** *La condition aux limites est maximale dissipative ie la forme quadratique $< \mathring{A}_n.,. >$ est négative sur $\ker M$ et $\ker M$ est maximale pour cette propriété. La notation $\mathring{A}_n$ désigne la trace de la matrice $A_n$ sur le bord $\Gamma_T$.*

Notons qu'une conséquence de cette hypothèse est que $\ker \mathring{A}_n \subset \ker M$. Remarquons également que tous les sous-espaces vectoriels sur lesquels la forme quadratique $< \mathring{A}_n .,. >$ est négative ou nulle, et maximaux pour cette popriété ont le même dimension, à savoir $N - r$.

**Remarque 3.2** *Des travaux de [21], [27], [26], [20] s'intéressent au cas où l'hypothèse* 1.1 *est violée. L'auteur ignore dans quelle mesure la théorie de couche limite développée précédemment peut se maintenir.*

Le théorème suivant concerne le prolongement des solutions de (19) :

**Théorème 3.9** *Si $T$ est strictement positif et $u \in H^\infty(\Omega_T)$ est solution de* (19) *alors il existe $T_0 > T$ et un unique prolongement de $u$ (en une fonction encore noté $u$) dans $H^\infty(\Omega_{T_0})$ solution de*

$$\text{(20)} \qquad \begin{cases} \mathcal{H}u = F(t,x,u) + f(t,x) & \text{quand } (t,x) \in \Omega_{T_0} \\ M(t,y)u = g(t,y) & \text{quand } (t,x) \in \Gamma_{T_0} \end{cases}$$

*De plus, si $T^* := \sup\{T_0 > T/$ il existe un prolongement de $u$ en une fonction encore notée $u$ solution de* (20)$\}$ *est fini, alors $lim_{t \to T^*} ||u||_{L^\infty(\Omega_t)} = +\infty$. Dans le cas linéaire , $T^* = \infty$.*

Le théorème (3.9) est un cas particulier des résultats de [12]. On donne en appendice une esquisse de preuve adaptée au cas semilinéaire envisagé ici. De plus, le caractère semilinéaire permet de préciser la condition d'explosion, qui ne porte ici. que sur la norme $L^\infty$.

On peut déduire du théorème 3.9 l'existence d'une solution régulière au problème mixte :

$$\text{(21)} \qquad \begin{cases} \mathcal{H}u = F(t,x,u) + f(t,x) & \text{quand } (t,x) \in \Omega_T \\ M(t,y)u = g(t,y) & \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T \\ u = a & \text{quand } t = 0 \end{cases}$$

Il est nécessaire pour cela d'imposer certaines conditions de compatibilité entre données initiales et données au bord. En effet, si $u$ est une solution régulière de (21) avec $T > 0$, on déduit de l'équation l'existence de fonctions $(H_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de classe $C^\infty$ telles que

$$\text{(22)} \qquad (\partial_t^k u)|_{t=0} = H_k(x, (\partial_x^\alpha a)_{|\alpha| \leqslant k}),$$

où $\alpha$ est un $n$-uplet $\alpha := (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}$, $|\alpha|$ la longueur $|\alpha| := \alpha_1 + ... + \alpha_n$ et $\partial_x^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} ... \partial_n^{\alpha_n}$. Comme par ailleurs, ils existent des fonctions $(G_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de classe $C^\infty$ telles que

$$\partial_t^k (Mu) = G_k(t, y, (\partial_t^j u)_{j \leqslant k}),$$

on a sur $\{t = x_n = 0\}$ les relations

$$(R_k) : \quad G_k(0, y, (H_j(y, 0, (\partial_x^\alpha a)_{|\alpha| \leqslant j}))_{j \leqslant k}) = \partial_t^k g(0, y).$$

**Théorème 3.10** *Soit* $a \in H^\infty(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^+)$ *. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*
(1) *La fonction* $a$ *vérifie les relations* $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$
(2) *Il existe* $T > 0$ *et* $u$ *solution régulière de* (21).

**Remarque 3.3** *Enoncer un théorème analogue dans un cadre de régularité finie est loin d'être évident. Une condition suffisante a été donnée dans [9] et une condition nécessaire et suffisante dans [20].*

Le théoréme précédent est non vide :

**Proposition 3.6** *Il existe* $a \in H^\infty(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^+)$ *qui vérifie les relations* $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$

*Preuve.* Dans cette preuve, on notera $\partial_x^\alpha = \partial_y^{\alpha'}\partial_n^{\alpha_n}$ où $\alpha = (\alpha', \alpha_n)$. Ils existent des fonctions $(\tilde{H}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $(\tilde{G}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de classe $C^\infty$ telles que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} H_k(x, (\partial_x^\alpha a)_{|\alpha|\leqslant k}) &= (-1)^k (A_n)^k \partial_n^k a + \tilde{H}_k(x, (\partial_x^\alpha a)_{|\alpha|\leqslant k, \alpha_n \neq k}) \\ G_k(t, y, (\partial_t^j u)_{1\leqslant j\leqslant k}) &= M\partial_t^k u + \tilde{G}_k(t, y, (\partial_t^j u)_{j\leqslant k-1}). \end{aligned}$$

Ainsi les relations $(R_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ se réecrivent :

$$\begin{aligned} (-1)^k M(A_n)^k \partial_n^k a|_{x_n=0} &= (\partial_t^k g)|_{t=0} - M\tilde{H}_k(y, 0, (\partial_x^\alpha a|_{x_n=0})_{|\alpha|\leqslant k, \alpha_n\neq k}) \\ &- \tilde{G}_k(0, y, (H_j(x, (\partial_x^\alpha a|_{x_n=0})_{|\alpha|\leqslant j}))_{j\leqslant k-1}). \end{aligned}$$

On a le lemme algébrique suivant :

**Lemme 3.2** *Pour tout entier naturel* $k$*, on a* $ImM(A_n)^k = \mathbb{R}^L$.

*Preuve.* Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\ker(A_n)^k = \ker A_n \subset \ker M$, et donc $ImM(A_n)^k = ImM = \mathbb{R}^L$. En effet, comme $(A_n)^k$ est symétrique, tout vecteur $x$ de $\mathbb{R}^L$ se décompose en $x = x_0 + x_1$ où $x_0 \in \ker A_n^k \subset \ker M$ et $x_1 \subset ImA_n^k$. Un vecteur quelconque $y$ de $\mathbb{R}^r$ s'écrit donc $y = Mx = Mx_1$, avec $x_1 \subset ImA_n^k$. $\square$

On obtient l'existence d'une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $H^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ telle que $Ma_0 = g$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} M(A_n)^k a_k = &-(-1)^k M\tilde{H}_k(y, 0, (\partial_y^{\alpha'} a_{\alpha_n}|_{x_n=0})_{|\alpha|\leqslant k, \alpha_n\neq k}) \\ &-\tilde{G}_k(0, y, (H_j(x, (\partial_y^{\alpha'} a_{\alpha_n})_{|\alpha|\leqslant j, \alpha_n\neq j}))_{j\leqslant k-1}) \end{aligned}$$

On conclut par une variante du théorème de Borel (prouvée en appendice).

**Lemme 3.3** *Il existe une application*

$$\begin{aligned} B : (H^\infty(\mathbb{R}^{n-1}))^{\mathbb{N}} &\to H^\infty(\mathbb{R}^n_+) \\ (b_k)_{k\in\mathbb{N}} &\mapsto b \end{aligned}$$

*telle que*
• *Pour tout* $k \in \mathbb{N}$, $\partial_n^k b|_{x_n=0} = b_k$,
• *Il existe un réel* $C \geq 0$ *tel que pour tout* $m \in \mathbb{N}$, *il existe* $C_m \geq 0$ *tel que pour toute famille* $(b_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (H^\infty(\mathbb{R}^{n-1}))^{\mathbb{N}}$,

$$||b||_{H^m(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C_m \sum_{0\leq k\leqslant m} ||b_k||_{H^m(\mathbb{R}^{n-1})} + C. \quad \square$$

La preuve de la proposition (3.6) assure le résultat suivant :

**Proposition 3.7** *Il existe des fonctions* $(\mathcal{A}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *de classe* $C^\infty$ *telle que, pour* $a \in H^\infty(\mathbb{R}^n_+)$, *les assertions suivantes sont équivalentes :*
(1). *La fonction a vérifie les relations* $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
(2). *Pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *pour tout* $y \in \mathbb{R}^{n-1}$,

$$(\partial_\theta^k a)(y, 0) = \mathcal{A}_k(x, ((\partial_x^\alpha a)(y, 0))) + \ker M.$$

Nous utiliserons ce théorème avec $M(t, y) = \Pi_+(t, y)$.

**Lemme 3.4** *La condition aux limites* $\Pi_+(t, y)U_a^0 = 0$ *est maximale dissipative pour* $A_n$.

*Preuve.* Il suffit de montrer que

$$\forall (t, y) \in (0, T) \times \mathbb{R}^{n-1}, \quad \Pi_+(t, y) = P_+(t, y)R(t, y).$$

En fait, si $R$ est telle que ${}^tRR = E_{n,n}$ et en notant $\Delta_R :={}^t R^{-1}A_nR^{-1}$ et $P_{+,R}$ la projection associée au sous-espace stable alors $\Pi_+ = P_{+,R}R$. Ceci découle de ce que $\Delta_R = RE_{n,n}^{-1}A_nR^{-1}$. $\square$

Le théorème 3.10 sera utilisé dans la suite avec des termes sources $f$ et $g$ fonctions des profils. Aussi notons que pour tout entier naturel $k$ la relation $(R_k)$ fait intervenir les restrictions à $t = 0$ des $(\partial_t^l f)_{l\leqslant k-1}$, $(f_u^{(l)})_{l\leqslant k-1}$ et $(\partial_t^l g)_{l\leqslant k}$.

Le théorème suivant établit des estimations de la différence $(u^\varepsilon - u^0)$. La qualité de l'approximation dépendant des composantes, on introduit :

$$E_+(t, y) := \sum_{\lambda>0} \ker(\mathring{E}_{n,n}^{-1}\mathring{A}_n(t, y) - \lambda Id), \quad E_0(t, y) := \ker \mathring{A}_n(t, y),$$
$$E_-(t, y) := \sum_{\lambda<0} \ker(\mathring{E}_{n,n}^{-1}\mathring{A}_n(t, y) - \lambda Id).$$

A ces trois sous-espaces on associe, pour tout $(t, y)$, leur dimension respective $d_+$, $d_0$ et $d_-$ et les projecteurs $\Pi_+$, $\Pi_0$ et $\Pi_-$ associés à la décomposition de l'espace des états $\mathbb{R}^L$ en $\mathbb{R}^L = E_+ \oplus E_0 \oplus E_-$ .
On introduit également les normes

$$||u||_{H^{m,s}(\Omega_T)} := \sum_{i+j+2k\leqslant m; i\leqslant s} ||\partial_t^k Z'^j \partial_n^i u||_{L^2(\Omega_T)}$$

qui différentient régularités normale et conormale.

**Théorème 3.11** *Si $u^0$ est une solution dans $H^\infty(\Omega_{T_0})$ de $Pb^0(T_0)$ alors il existe $T \in ]0,T_0]$, $\varepsilon_0 \in ]0,1]$ et $(u^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,\varepsilon_0]}$ solutions de $(Pb^\varepsilon(T))_{\varepsilon\in]0,\varepsilon_0]}$ avec*

$$||\Pi_+(u^\varepsilon - u^0)||_{L^\infty(\Omega_T)} \leqslant c\sqrt{\varepsilon} \quad , \quad ||(Id - \Pi_+)(u^\varepsilon - u^0)||_{L^\infty(\Omega_T)} \leqslant c,$$
$$||\Pi_+(u^\varepsilon - u^0)||_{H^{m,s}(\Omega_T)} \leqslant c_{s,m}\sqrt{\varepsilon}(1 + \varepsilon^{\frac{1}{4}-\frac{s}{2}}) \quad \forall s \in [0, \frac{3}{2}],$$
$$||\Pi_0(u^\varepsilon - u^0)||_{H^{m,s}(\Omega_T)} \leqslant c_{s,m}\varepsilon^{\frac{1}{4}-\frac{s}{2}} \quad \forall s \in [0, \frac{1}{2}],$$
$$||\Pi_-(u^\varepsilon - u^0)||_{H^{m,s}(\Omega_T)} \leqslant c_{s,m}\varepsilon^{\frac{1}{2}-s} \quad \forall s \in [0, \frac{1}{2}].$$

Les estimations ci-dessus conduisent aux faits suivants :

$$\Pi_+(u^\varepsilon - u^0) \to 0 \quad \text{dans} \quad H^{m,s}(\Omega_T) \quad \forall s \in [0, \frac{3}{2}[,$$
$$(Id - \Pi_+)(u^\varepsilon - u^0) \to 0 \quad \text{dans} \quad H^{m,s}(\Omega_T) \quad \forall s \in [0, \frac{1}{2}[,$$

et la famille $((\Pi_+(u^\varepsilon - u^0), (Id - \Pi_+)(u^\varepsilon - u^0)))_\varepsilon$ est bornée dans

$$H^{m,\frac{3}{2}}(\Omega_T) \times H^{m,\frac{1}{2}}(\Omega_T).$$

Le théorème 3.11 est une conséquence de la démonstration des théorèmes précédents où sont établies les proprietés de polarisation suivantes (voir en particulier la proposition 5.4) :

$$(Id - \Pi_0)\mathcal{U}_b^0 = (Id - \Pi_-)\mathcal{U}_c^0 = (Id - \Pi_-)\mathcal{U}_c^1 = 0.$$

# 4 Preuve du théorème 3.8

La démonstration du théorème 3.8 se compose de deux grandes étapes. La première concerne la construction de solutions approchées.

**Théorème 4.1** *Soit $N \in \mathbb{N}$. Il existe un sous-ensemble $\mathcal{P}_{init,N}$ de $(\mathcal{P}_{init})^{N+1}$ tel que pour toute famille $(\mathcal{U}_{init}^j)_{0\leqslant j\leqslant N} \in \mathcal{P}_{init}^{N+1}$, les assertions suivantes sont équivalentes :*
*1. La famille $(\mathcal{U}_{init}^j)_{0\leqslant j\leqslant N}$ est dans $\mathcal{P}_{init,N}$*
*2. Il existe un temps $T > 0$ et une unique famille $(\mathcal{U}^j)_{0\leqslant j\leqslant N}$ dans $\mathcal{P}(\Omega_T)^{N+1}$ vérifiant $(S_{cl}^j(T))_{0\leqslant j\leqslant N}$, $(S^j(T))_{0\leqslant j\leqslant N}$ et tel que*

$$\mathcal{U}^j|_{t=0} = \mathcal{U}_{init}^j \quad \text{pour } 0 \leqslant j \leqslant N.$$

La preuve des théorèmes 3.2, 3.3 et 4.1 fait l'objet de la section suivante. Le théorème suivant affirme l'existence de solutions exactes au problème mixte admettant un développement asymptotique dont la partie principale est une solution approchée de $Pb^\varepsilon(T)$. Il découle des théorèmes 3.1 et 3.7.

**Théorème 4.2** *Soit $T$ un temps strictement positif et $M \geqslant \frac{1}{4}$. Si $(a^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]} \in \mathcal{A}^m(T)$ est une solution approchée de $Pb^\varepsilon(T)$ au sens où*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\varepsilon a^\varepsilon = \varepsilon^M g_\varepsilon \quad &\text{quand } (t,x) \in \Omega_T \\ a^\varepsilon = 0 \quad &\text{quand } (t,x) \in \Gamma_T \end{aligned}$$

*avec $(g_\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]} \in \mathcal{H}^m(T)$ alors pour toute famille de données initiales $(u_0^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ vérifiant les relations $(R_k^\varepsilon)_{k\leqslant s}$ et telle que*

$$(\frac{u_0^\varepsilon - a^\varepsilon|_{t=0}}{\varepsilon^M})_{\varepsilon\in]0,1]} \in \Lambda^m_{init},$$

*il exixte $0 < T' < T$ tel que le problème mixte $Pb^\varepsilon_{mixte}(T')$ admette, pour $\varepsilon \in ]0,\varepsilon_0]$, avec $\varepsilon_0 \in ]0,1]$ une unique solution $u^\varepsilon$ telle que*

$$(\frac{u^\varepsilon - a^\varepsilon}{\varepsilon^M})_{\varepsilon\in]0,1]} \in \Lambda^m(T').$$

# 5 Preuve du théorème 4.1

## 5.1 Composition non linéaire des profils

**Définition 5.1** *On dira qu'une famille de fonctions régulières $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ satisfait*

$$u^\varepsilon \sim \sum_{j\geqslant 0} \sqrt{\varepsilon}^j\, \mathcal{U}^j(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon},\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}})$$

*pour une suite donnée de profils $\mathcal{U}^j$ de $\mathcal{P}(\Omega_T)$ si pour tout $M$ entier naturel, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que la famille $(r_M^\varepsilon)_\varepsilon$ définie par*

$$r_M^\varepsilon(t,x) := u^\varepsilon(t,x) - \sum_{j=0}^{M} \sqrt{\varepsilon}^j\, \mathcal{U}^j(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon},\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}})$$

*est dans $\Lambda^m(T)$.*

$\mathcal{P}(\Omega_T)$ est un espace de Fréchet, ce n'est pas une algèbre mais est préservé par composition non linéaire au sens suivant :

**Proposition 5.1** *Soit $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une famille de fonctions de $H^\infty(\Omega_T)$ satisfaisant*

$$u^\varepsilon \sim \sum_{j\geqslant 0} \sqrt{\varepsilon}^j\, \mathcal{U}^j(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon},\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}})$$

*pour une suite donnée de profils $\mathcal{U}^j := \mathcal{U}_a^0 + \mathcal{U}_b^0 + \mathcal{U}_c^0$ de $\mathcal{P}(\Omega_T)$ et $F(t,x,u)$ une fonction de $C^\infty(\Omega_T \times \mathbb{R}^L, \mathbb{R}^L)$ telle que $F(t,x,0) = 0$. Alors*

1. *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *la fonction* $F(t,x,u^\varepsilon(t,x))$ *est dans* $H^\infty(\Omega_T)$ *et il existe des profils* $(\mathcal{V}^j)_{j\geqslant 0}$ *dans* $\mathcal{P}(\Omega_T)$ *tels que*

$$F(t,x,u^\varepsilon(t,x)) \sim \sum_{j\geqslant 0} \sqrt{\varepsilon}^j\, \mathcal{V}^j(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon},\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}).$$

2. *Le profil* $\mathcal{V}^0$ *se décompose en* $\mathcal{V}^0 = \mathcal{V}^0_a + \mathcal{V}^0_b + \mathcal{V}^0_c$ *avec*

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}^0_a &:= F(t,x,\mathcal{U}^0_a),\\
\mathcal{V}^0_b &:= F(t,x,\mathcal{U}^0_a+\mathcal{U}^0_b) - F(t,x,\mathcal{U}^0_a),\\
\mathcal{V}^0_c &:= F(t,x,\mathcal{U}^0_a+\mathring{\mathcal{U}}^0_b+\mathcal{U}^0_c) - F(t,x,\mathcal{U}^0_a+\mathring{\mathcal{U}}^0_b).
\end{aligned}$$

*Lorsque* $u \in H^\infty(\Omega_T,\mathcal{S}(\mathbb{R}^+_\theta))$, $\mathring{u}$ *désigne la trace de* $u$ *en* $\theta = 0$.

3. *Pour tout* $j \geqslant 1$, *il existe* $(Q^j_a, Q^j_b, Q^j_c)_{j\in\mathbb{N}}$ $C^\infty$ *de leurs arguments tels que* $\mathcal{V}^j$ *se décompose en* $\mathcal{V}^j = \mathcal{V}^j_a + \mathcal{V}^j_b + \mathcal{V}^j_c$ *avec*

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}^j_a &:= F'_u(t,x,\mathcal{U}^0_a).\mathcal{U}^j_a + Q^j_a(t,x,(\mathcal{U}^k_a)_{k\leqslant j-1}),\\
\mathcal{V}^j_b &:= F'_u(t,x,\mathcal{U}^0_a+\mathcal{U}^0_b).(\mathcal{U}^j_a+\mathcal{U}^j_b) - F'_u(t,x,\mathcal{U}^0_a).\mathcal{U}^j_a + Q^j_b(t,x,(\mathcal{U}^k_a,\mathcal{U}^k_b)_{k\leqslant j-1}),\\
\mathcal{V}^j_c &:= Q^j_c(t,x,z,(\mathcal{U}^k_a,\mathcal{U}^k_c)_{k\leqslant j},(\partial^i_\theta\mathring{\mathcal{U}}^k_b)_{i+k\leqslant j}).
\end{aligned}$$

*De plus* $Q^1_a = Q^1_b = 0$.

L'esprit de la proposition est le suivant : notre analyse fait intervenir des développements avec des profils et un reste. Aussi, la propriété d'algèbre n'est pas essentielle si l'erreur commise peut être incluse dans le reste. La stratégie de la démonstration se résume ainsi : on introduit une algèbre de profils plus vaste contenant $\mathcal{P}(\Omega_T)$ où sont autorisés des profils dépendants à la fois de $\frac{x_n}{\varepsilon}$ et de $\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}$. C'est un développement avec de tels profils que l'on obtient à priori par composition non linéaire. On redéveloppe les profils couplés en un développement de CLNC en contrôlant l'erreur à tout ordre.

*Preuve.* Considérons

$$\tilde{\mathcal{P}}(\Omega_T) := H^\infty(\Omega_T) \oplus H^\infty(\Omega_T,\mathcal{S}(\mathbb{R}^+_\theta)) \oplus H^\infty(\Omega_T,\mathcal{S}(\mathbb{R}^+_\theta\times\mathbb{R}^+_z))$$

et étendons la définition 5.1 à de tels profils. $\tilde{\mathcal{P}}(\Omega_T)$ est l'espace considéré par O.Guès dans [12]. C'est la plus petite algèbre contenant $\mathcal{P}(\Omega_T)$.
On a, pour $(\mathcal{U}^j)_{j\geqslant 0}$ dans $\mathcal{P}(\Omega_T)$,

$$F(t,x,\sum_{j\geqslant 0}\sqrt{\varepsilon}^j\,\mathcal{U}^j) \sim \sum_{j\geqslant 0}\sqrt{\varepsilon}^j\,\tilde{\mathcal{V}}^j \tag{23}$$

où $\tilde{\mathcal{V}}^0 := F(t,x,\mathcal{U}^0)$ et pour $j \geqslant 1$, $\tilde{\mathcal{V}}^j := \tilde{\mathbf{V}}^j(t,x,(\mathcal{U}^k)_{0\leqslant k\leqslant j})$ avec, pour tout $(t,x,(u^k)_{k\leqslant j}) \in \Omega_T\times(\mathbb{R}^L)^{j+1}$,

$$\tilde{\mathbf{V}}^j(t,x,(u^k)_{0\leqslant k\leqslant j}) := \sum_{n=1}^{j}\sum_{k_1+\ldots+k_n=j}\frac{1}{n!}D^n_uF(t,x,u^0)(u^{k_1},\ldots,u^{k_n}),,$$

la somme portant sur des $k_i \neq 0$, pour $i$ compris entre 1 et $n$.
Les $\tilde{\mathcal{V}}^j$ sont dans $\tilde{\mathcal{P}}(\Omega_T)$ et se décomposent en $\tilde{\mathcal{V}}^j := \tilde{\mathcal{V}}^j_a + \tilde{\mathcal{V}}^j_b + \tilde{\mathcal{V}}^j_c$ avec

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{V}}^j_a &= \tilde{\mathbf{V}}^j(t,x,(\mathcal{U}^k_a)_{0\leqslant k\leqslant j}), \\ \tilde{\mathcal{V}}^j_b &= \tilde{\mathbf{V}}^j(t,x,(\mathcal{U}^k_a+\mathcal{U}^k_b)_{0\leqslant k\leqslant j}) - \tilde{\mathbf{V}}^j(t,x,(\mathcal{U}^k_a)_{0\leqslant k\leqslant j}), \\ \tilde{\mathcal{V}}^j_c &= \tilde{\mathbf{V}}^j(t,x,(\mathcal{U}^k)_{0\leqslant k\leqslant j}) - \tilde{\mathbf{V}}^j(t,x,(\mathcal{U}^k_a+\mathcal{U}^k_b)_{0\leqslant k\leqslant j}). \end{aligned} \tag{24}$$

Nous allons maintenant redévelopper les termes $\tilde{\mathcal{V}}^j_c$ en développements de CLNC. Avant cela, on réalise une manipulation préliminaire qui sera importante pour asurer la décroissance rapide des profils du développement obtenu. Elle consiste essentiellement à factoriser par des termes de CLNC. Effectuant un développement de Taylor en $\theta$, on a l'existence de matrices de taille $L \times L$ régulières $(\tilde{\mathbf{V}}^{j,k,\flat})_{0\leqslant k\leqslant j}$ telles que pour tout $(t,x) \in \Omega_T$, pour tout $\mathfrak{u} := (u_k)_{0\leqslant k\leqslant j}$ et $\mathfrak{v} := (v_k)_{0\leqslant k\leqslant j}$ vecteurs de $(\mathbb{R}^L)^{j+1}$,

$$\tilde{\mathbf{V}}^j(t,x,\mathfrak{u}+\mathfrak{v}) - \tilde{\mathbf{V}}^j(t,x,\mathfrak{u}) = \sum_{k=0}^{j} \tilde{\mathbf{V}}^{j,k,\flat}(t,x,\mathfrak{u},\mathfrak{v}).v_k$$

Ainsi, notant $\mathfrak{U}_d := (U^k_d)_{0\leqslant k\leqslant j}$, où $d$ désigne $a$, $b$ ou $c$, on a

$$\tilde{\mathcal{V}}^j_c = \sum_{k=0}^{j} \tilde{\mathbf{V}}^{j,k,\flat}(t,x,\mathfrak{U}_a+\mathfrak{U}_b,\mathfrak{U}_c).\mathcal{U}^k_c.$$

Or pour tout $0 \leqslant k \leqslant j$, le profil $\mathcal{U}^k_b$ admet pour développement de Taylor : $\sum_{i\geqslant 0} \frac{\theta^i}{i!}\partial^i_\theta \mathring{\mathcal{U}}^k_b$. Le profil $\tilde{\mathcal{V}}^j$ admet donc également un développement de Taylor de la forme $\sum_{i\geqslant 0} \theta^i\, \mathcal{W}^{j,i}$ avec

$$\mathcal{W}^{j,0} = \sum_{k=0}^{j} \tilde{\mathbf{V}}^{j,k,\flat}(t,x,\mathfrak{U}_a+\mathring{\mathfrak{U}}_b,\mathfrak{U}_c).\mathcal{U}^k_c$$

et, pour $j \geqslant 1$,

$$\mathcal{W}^{j,i} = \sum \frac{1}{\Pi_{l=0}^{L}\frac{1}{n_l!}} \sum_{k=0}^{j} D^{\mathfrak{n}}_u \tilde{\mathbf{V}}^{j,k,\flat}(t,x,\mathfrak{U}_a+\mathring{\mathfrak{U}}_b,\mathfrak{U}_c).\mathcal{U}^k_c.\mathfrak{u}^0 \ldots \mathfrak{u}^L.$$

Dans l'expression précédente, la somme porte sur l'ensemble des indices $\mathfrak{n} := (n_0,\ldots,n_L) \in \mathbb{N}^{L+1}$ et des indices $(k^l_m)_{l/n_l>0} \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sum_{l=0}^{L}\sum_{m=1}^{n_l} k^l_m = i$. On a désigné par $D^{\mathfrak{n}}_u$ le produit de dérivées $D^{\mathfrak{n}}_u := D^{n_0}_{u_0}\ldots D^{n_L}_{u_L}$ où, pour $0 \leqslant l \leqslant L$, $D^{n_l}_{u_l}$ est la dérivée d'ordre $n_l$ par rapport à la variable $u^l$ de $\tilde{\mathbf{V}}^{j,k,\flat}(t,x,(u_l)_{0\leqslant l\leqslant j},\mathfrak{U}_c)$. Cette dérivée est évaluée en $\mathfrak{u}^l := (u^{l,k^l_1},\ldots,u^{l,k^l_{n_l}})$ où $u^{k,l} = \frac{\partial^l_\theta \mathring{\mathcal{U}}^k_b}{l!}$.

Par suite, on a $\tilde{\mathcal{V}}_c^j \sim \sum_{i\geqslant 0} \sqrt{\varepsilon}^i\, \tilde{\mathcal{W}}^{j,i}$ avec $\tilde{\mathcal{W}}^{j,i} := z^i\, \mathcal{W}^{j,i}$ dans $H^\infty(\Omega_T, \mathcal{S}(\mathbb{R}_z^+))$.

Notant $\mathcal{V}_a^j := \tilde{\mathcal{V}}_a^j$, $\mathcal{V}_b^j := \tilde{\mathcal{V}}_b^j$ et $\mathcal{V}_c^j := \sum_{i+k=j} \mathcal{W}^{k,i}$ et $\mathcal{V}^j := \mathcal{V}_a^j + \mathcal{V}_b^j + \mathcal{V}_c^j$ on a que $\mathcal{V}^j \in \mathcal{P}(\Omega_T)$, qu'il existe $Q_c^j$ tel que

$$\mathcal{V}_c^j := Q_c^j(t,x,z,(\mathcal{U}_a^k,\mathcal{U}_b^k)_{0\leqslant k\leqslant j},(\partial_\theta^i \mathring{\mathcal{U}}_b^k)_{i+k\leqslant j})$$

et que $\sum_{j\geqslant 0} \sqrt{\varepsilon}^j\, \mathcal{U}^j \sim \sum_{j\geqslant 0} \sqrt{\varepsilon}^j \mathcal{V}^j$. $\square$

### 5.2 L'ansatz de résolution

Un développement de Taylor au premier ordre assure l'existence de $A_n^\flat$ et $E_{n,n}^\flat$ tels que $A_n = \mathring{A}_n + x_n A_n^\flat$ et $E_{n,n} = \mathring{E}_{n,n} + x_n E_{n,n}^\flat$ où $\mathring{A}_n$ (resp $\mathring{E}_{n,n}$) désigne la trace de $A_n$ (resp $E_{n,n}$) en $x_n = 0$.

La substitution du développement

$$\sum_{j\geqslant 0} \sqrt{\varepsilon}^j\, \mathcal{U}^j(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon},\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}})$$

à la place de $u^\varepsilon$ dans (1) donne, par la proposition précédente un développement (l'ansatz de résolution)

$$\sum_{j\geqslant -2} \sqrt{\varepsilon}^j\, \mathcal{F}^j(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon},\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}})$$

où les profils $\mathcal{F}^j$ sont dans $\mathcal{P}(\Omega_T)$ et se décomposent de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{F}_a^{-2} &=& \mathcal{F}_b^{-2} = 0, \quad \mathcal{F}_c^{-2} = \mathring{A}_n \partial_z \mathcal{U}_c^0 - \mathring{E}_{n,n}\partial_{zz}\mathcal{U}_c^0 \\
\mathcal{F}_a^{-1} &=& 0, \quad \mathcal{F}_b^{-1} = \mathring{A}_n \partial_\theta \mathcal{U}_b^0 \quad \mathcal{F}_c^{-1} = \mathring{A}_n \partial_z \mathcal{U}_c^1 - \mathring{E}_{n,n}\partial_{zz}\mathcal{U}_c^1, \\
\mathcal{F}_a^0 &=& \mathcal{H}\mathcal{U}_a^0 - F(t,x,\mathcal{U}_a^0) - f(t,x), \\
\mathcal{F}_b^0 &=& \mathring{A}_n \partial_\theta \mathcal{U}_b^1 + \mathcal{H}\mathcal{U}_b^0 + A_n^\flat \theta \partial_\theta \mathcal{U}_b^0 - \mathring{E}_{n,n}\partial_{\theta\theta}\mathcal{U}_b^0 - F(t,x,\mathcal{U}_a^0 + \mathcal{U}_b^0) + F(t,x,\mathcal{U}_a^0), \\
\mathcal{F}_c^0 &=& \mathring{A}_n \partial_z \mathcal{U}_c^2 - \mathring{E}_{n,n}\partial_{zz}\mathcal{U}_c^2 + q_c^0,
\end{array}$$

et, pour $j \geqslant 1$,

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{F}_a^j &=& \mathcal{H}\mathcal{U}_a^j - F'_u(t,x,\mathcal{U}_a^0).\mathcal{U}_a^j + q_a^j, \\
\mathcal{F}_b^j &=& \mathring{A}_n \partial_\theta \mathcal{U}_b^{j+1} + \mathcal{H}\mathcal{U}_b^j + A_n^\flat \theta \partial_\theta \mathcal{U}_b^j - \mathring{E}_{n,n}\partial_{\theta\theta}\mathcal{U}_b^j \\
& - & F'_u(t,x,\mathcal{U}_a^0 + \mathcal{U}_b^0).(\mathcal{U}_a^j + \mathcal{U}_b^j) + F'_u(t,x,\mathcal{U}_a^0).\mathcal{U}_a^j + q_b^j, \\
\mathcal{F}_c^j &=& \mathring{A}_n \partial_z \mathcal{U}_c^{j+2} - \mathring{E}_{n,n}\partial_{zz}\mathcal{U}_c^{j+2} + q_c^j,
\end{array}$$

où l'on a regroupé un certain nombre de termes de la façon suivante :

$$q_c^0 := (\mathcal{H} - \mathcal{E}_c)\mathcal{U}_c^0 - F(t,x,\mathcal{U}_a^0 + \overset{\circ}{\mathcal{U}}{}_b^0 + \mathcal{U}_c^0) + F(\mathcal{U}_a^0 + \overset{\circ}{\mathcal{U}}{}_b^0),$$

$$q_a^1 := 0, \quad q_b^1 := -\mathcal{E}_b \overset{\circ}{\mathcal{U}}{}_b^0,$$
$$q_c^1 := (\mathcal{H} - \mathcal{E}_c)\mathcal{U}_c^1 - Q_c^1(t,x,z,(\mathcal{U}_a^k, \mathcal{U}_c^k)_{k \leqslant 1}, (\partial_\theta^i \overset{\circ}{\mathcal{U}}{}_b^k)_{i+k \leqslant 1}),$$

et pour $j \geqslant 2$

$$\begin{array}{rcl} q_a^j & := & -\mathcal{E}\mathcal{U}_a^{j-2} - Q_a^j(t,x,(\mathcal{U}_a^k)_{k \leqslant j-1}), \\ q_b^j & := & -\mathcal{E}_b \mathcal{U}_b^{j-1} - \mathcal{E}\mathcal{U}_b^{j-2} - Q_b^j(t,x,(\mathcal{U}_a^k, \mathcal{U}_b^k)_{k \leqslant j-1}), \\ q_c^j & := & (\mathcal{H} - \mathcal{E}_c)\mathcal{U}_c^j - \mathcal{E}\mathcal{U}_c^{j-2} - Q_c^j(t,x,z,(\mathcal{U}_a^k, \mathcal{U}_c^k)_{k \leqslant j}, (\partial_\theta^i \overset{\circ}{\mathcal{U}}{}_b^k)_{i+k \leqslant j}). \end{array}$$

On note $\mathcal{E}_b$ et $\mathcal{E}_c$ les opérateurs

$$\mathcal{E}_b := \sum_{i=1}^n \partial_i(E_{in}\partial_\theta.) + \partial_\theta(E_{ni}\partial_i.),$$
$$\mathcal{E}_c := \sum_{i=1}^n \partial_i(E_{in}\partial_z.) + \partial_z(E_{ni}\partial_i.).$$

On a noté pour alléger $q_a^j$ , $q_b^j$ (pour $j \in \mathbb{N}^*$) et $q_c^j$ (pour $j \in \mathbb{N}$) au lieu de

$$q_c^0(t,x,\mathcal{U}_a^0, \overset{\circ}{\mathcal{U}}{}_b^0, \mathcal{U}_c^0, \partial_{t,x}\mathcal{U}_c^0, \partial_z\partial_x\mathcal{U}_c^0),$$
$$q_b^1(t,x,(\partial_x^\beta \partial_\theta \mathcal{U}_b^0)_{\beta=0,1}),$$
$$q_c^1(t,x,z,(\mathcal{U}_a^k, \mathcal{U}_c^k)_{k \leqslant 1}, (\partial_\theta^i \overset{\circ}{\mathcal{U}}{}_b^k)_{i+k \leqslant 1}, \partial_{t,x}\mathcal{U}_c^1, (\partial_z \partial_x^\beta \mathcal{U}_c^1)_{\beta=0,1}),$$

et, pour $j \geqslant 2$,

$$q_a^j(t,x,(\partial_x^\beta \mathcal{U}_a^{j-2})_{\beta=1,2}, (\mathcal{U}_a^k)_{k \leqslant j-1}),$$
$$q_b^j(t,x,(\mathcal{U}_a^k, \mathcal{U}_b^k)_{k \leqslant j-1}, (\partial_x^\beta \partial_\theta \mathcal{U}_b^{j-1})_{\beta=0,1}, (\partial_x^\beta \mathcal{U}_b^{j-2})_{\beta=1,2}),$$
$$q_c^j(t,x,z,(\mathcal{U}_a^k, \mathcal{U}_c^k)_{k \leqslant j}, (\partial_\theta^i \overset{\circ}{\mathcal{U}}{}_b^k)_{i+k \leqslant j}, \partial_{t,x}\mathcal{U}_c^j, (\partial_z \partial_x^\beta \mathcal{U}_c^j)_{\beta=0,1}, (\partial_x \mathcal{U}_c^{j-2})_{\beta=1,2}).$$

On note $\partial_x$ la collection des $(\partial_i)_{i=1,\ldots,n}$, $\partial_\eta$ la collection des $(\partial_i)_{i=1,\ldots,n}$ et de $\partial_\theta$ et $\partial_{t,x}$ la collection des $(\partial_i)_{i=0,\ldots,n}$.
On a alors que, pour $j \geqslant 1$, $q_b^j$ dépend de

$$(t,x,(\mathcal{U}_a^k, \mathcal{U}_b^k)_{k \leqslant j-1}, (\partial_\eta^\beta (\mathcal{U}_b^{j-1}, \mathcal{U}_b^{j-2})_{\beta=0,1}).$$

### 5.3 Changement de variables

Nous allons procéder à un changement d'inconnue dont le but est de trivialiser les coefficients devant les dérivées secondes en les variables rapides introduites par la viscosité. Le fait remarquable est que l'on peut conserver le caractère symétrique.

Introduisons les champs réguliers de matrices $L \times L$ : $R(t,y) := \mathring{E}_{n,n}^{\frac{1}{2}}(t,y)$, $\Lambda(t,y) := R^{-1}\mathring{A}_n R^{-1}$, et les champs réguliers de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^L$ :

$$\tilde{E}_+(t,y) := \sum_{\lambda>0} \ker(\Lambda(t,y) - \lambda Id), \quad \tilde{E}_0(t,y) := \ker \Lambda(t,y),$$
$$\tilde{E}_-(t,y) := \sum_{\lambda<0} \ker(\Lambda(t,y) - \lambda Id).$$

A ces trois sous-espaces, on associe, pour tout $(t,y)$, leur dimension respective $d_+$, $d_0$ et $d_-$ ; des bases orthogonales respectives d'éléments propres $((\lambda_j, r_j))_{j\in I_+}$, $((\lambda_j, r_j))_{j\in I_0}$ et $((\lambda_j, r_j))_{j\in I_-}$ et les projecteurs orthogonaux respectifs $P_+$, $P_0$ et $P_-$.

Introduisons $U^k := R\mathcal{U}^j$ et multiplions les équations précédentes par $R^{-1}$ à gauche. Notant $\tilde{\mathcal{F}}^j := R^{-1}\mathcal{F}^j$, $\tilde{\mathcal{H}} := R^{-1}\mathcal{H}R^{-1}$, $\tilde{F}(U) := R^{-1}F(\mathcal{U})$, $\Lambda^\flat := R^{-1}A_n^\flat R^{-1}$,

$$\tilde{q}_c^0(t,x,U_a^0,\mathring{U}_b^0,U_c^0,\partial_{t,x}U_c^0,\partial_z\partial_x U_c^0) := R^{-1}q_c^0(t,x,\mathcal{U}_a^0,\mathring{\mathcal{U}}_b^0,\mathcal{U}_c^0,\partial_{t,x}\mathcal{U}_c^0,\partial_z\partial_x\mathcal{U}_c^0)$$

$$\tilde{q}_b^1(t,x,(\partial_x^\beta\partial_\theta U_b^0)_{\beta=0,1}) := R^{-1}q_b^1(t,x,(\partial_x^\beta\partial_\theta\mathcal{U}_b^0)_{\beta=0,1}),$$
$$\tilde{q}_c^1(t,x,z,(U_a^j,U_c^j)_{j\leqslant 1},(\partial_\theta^i\mathring{U}_b^k)_{i+k\leqslant 1},\partial_{t,x}U_c^1,(\partial_z\partial_x^\beta U_c^1)_{\beta=0,1}) :=$$
$$R^{-1}q_c^1(t,x,z,(\mathcal{U}_a^j,\mathcal{U}_c^k)_{k\leqslant 1},(\partial_\theta^i\mathring{\mathcal{U}}_b^k)_{i+k\leqslant 1},\partial_{t,x}\mathcal{U}_c^1,(\partial_z\partial_x^\beta\mathcal{U}_c^1)_{\beta=0,1}),$$

et pour $j \geqslant 2$

$$\tilde{q}_a^j(t,x,(\partial_x^\beta U_a^{j-2})_{\beta=1,2},(U_a^k)_{k\leqslant j-1}) := R^{-1}q_a^j(t,x,(\partial_x^\beta\mathcal{U}_a^{j-2})_{\beta=1,2},(\mathcal{U}_a^k)_{k\leqslant j-1}),$$
$$\tilde{q}_b^j(t,x,(U_a^k,U_b^k)_{k\leqslant j-1},(\partial_\eta^\beta U_b^{j-1},U_b^{j-2})_{\beta=0,1}) :=$$
$$R^{-1}q_b^j(t,x,(\mathcal{U}_a^k,\mathcal{U}_b^k)_{k\leqslant j-1},(\partial_\eta^\beta\mathcal{U}_b^{j-1},\mathcal{U}_b^{j-2})_{\beta=0,1}),$$
$$\tilde{q}_c^j(t,x,z,(U_a^k,U_c^k)_{k\leqslant j},(\partial_\theta^i\mathring{U}_b^k)_{i+k\leqslant j},\partial_{t,x}U_c^j,(\partial_z\partial_x^\beta U_c^j)_{\beta=0,1},(\partial_x^\beta U_c^{j-2})_{\beta=1,2}) :=$$
$$R^{-1}q_c^j(t,x,z,(U_a^k,U_c^k)_{k\leqslant j},(\partial_\theta^i\mathring{U}_b^j)_{i+j\leqslant j},\partial_{t,x}U_c^j,(\partial_z\partial_x^\beta U_c^j)_{\beta=0,1},(\partial_x U_c^{j-2})_{\beta=1,2})$$

on a :

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{F}}_a^{-2} &= \tilde{\mathcal{F}}_b^{-2} = 0 \quad \tilde{\mathcal{F}}_c^{-2} = \Lambda\partial_z U_c^0 - \partial_{zz} U_c^0,\\
\tilde{\mathcal{F}}_a^{-1} &= 0 \quad \tilde{\mathcal{F}}_b^{-1} = \Lambda\partial_\theta U_b^0 \quad \tilde{\mathcal{F}}_c^{-1} = \Lambda\partial_z U_c^1 - \partial_{zz} U_c^1,\\
\tilde{\mathcal{F}}_a^{0} &= \tilde{\mathcal{H}} U_a^0 - \tilde{F}(t,x,U_a^0) - f(t,x),\\
\tilde{\mathcal{F}}_b^{0} &= \Lambda\partial_\theta U_b^1 + \tilde{\mathcal{H}} U_b^0 + \Lambda^\flat \theta\partial_\theta U_b^0 - \partial_{\theta\theta} U_b^0 - \tilde{F}(t,x,U_a^0+U_b^0) + \tilde{F}(t,x,U_a^0),\\
\tilde{\mathcal{F}}_c^{0} &= \Lambda\partial_z U_c^2 - \partial_{zz} U_c^2 + \tilde{q}_c^0
\end{aligned}
$$

et, pour $j \geqslant 1$,

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{F}}_a^{j} &= \tilde{\mathcal{H}} U_a^j - \tilde{F}'_u(t,x,U_a^0).U_a^j + \tilde{q}_a^j,\\
\tilde{\mathcal{F}}_b^{j} &= \Lambda\partial_\theta U_b^{j+1} + \tilde{\mathcal{H}} U_b^j + \Lambda^\flat \theta\partial_\theta U_b^j - \partial_{\theta\theta} U_b^j,\\
&- \tilde{F}'_u(t,x,U_a^0+U_b^0).(U_a^j+U_b^j) + \tilde{F}'_u(t,x,U_a^0).U_a^j + \tilde{q}_b^j,\\
\tilde{\mathcal{F}}_c^{j} &= \Lambda\partial_z U_c^{j+2} - \partial_{zz} U_c^{j+2} + \tilde{q}_c^j.
\end{aligned}
$$

## 5.4 Problème hyperbolique-parabolique

Dans ce paragraphe, nous donnons des résultats concernant le problème mixte et le problème de prolongement pour un certain type d'équation dite hyperbolique-parabolique ([12]). Ces résultats seront utilisés par la suite dans l'analyse de la CLC. Considérons $T_0 > 0$ et notons $K := P_0\Lambda^\flat P_0$, $\mathbb{H} := P_0\tilde{\mathcal{H}}P_0 + K\theta\partial_\theta$. $\mathbb{H}$ est un opérateur symétrique hyperbolique sur l'espace des fonctions telles que $(Id - P_0)W = 0$ pour lequel $\{x_n = 0\}$ est totalement caractéristique. Introduisons l'espace $\mathcal{N}(T) := H^\infty(\Omega_T, \mathcal{S}(\mathbb{R}_+))$ et le problème

$$
\begin{aligned}
&(25) \qquad (Id - P_0)W = 0, \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_T \times \mathbb{R}_\theta^+,\\
&(26) \qquad (-\partial_\theta^2 + \mathbb{H})W = P_0 f(t,x,p,W) \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_T \times \mathbb{R}_\theta^+,\\
&(27) \qquad W|_{\theta=0} = b \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_T\\
&(28) \qquad W = a \quad \text{quand } t = 0
\end{aligned}
$$

où $f(t,x,p,W) \in C^\infty$, $p(t,x,\theta) \in \mathcal{N}(T_0)$, $b \in H^\infty(\Omega_T)$.

Examinons la compatibilité des données : si $W$ est une solution régulière de $(25) - (26) - (28)$ avec $T > 0$ alors il existe des fonctions $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de classe $C^\infty$ telles que

$$
(\partial_t^k W)|_{t=0} = I_k(x,\theta,(\partial_x^i\partial_\theta^j a)_{i+\frac{j}{2}\leqslant k}). \tag{29}
$$

Si, de plus, $W$ vérifie (27), on a nécessairement sur le coin $\{t = \theta = 0\}$ les relations de compatibilité

$$
(R'_k): \quad I_k(x,0,(\partial_x^i\partial_\theta^j a)_{i+\frac{j}{2}\leqslant k}) = (\partial_t^k b)|_{t=0}.
$$

La réciproque est contenue dans le théorème suivant

**Théorème 5.1** *Soit $a \in H^\infty(\mathbb{R}^n_+, \mathcal{S}(\mathbb{R}_+))$ . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*
*(1). La fonction $a$ vérifie les relations $(R'_k)$,*
*(2). Il existe $T \in ]0, T_0]$ et $W \in \mathcal{N}(T)$ solution régulière de $(25)-(26)-(27)-(28)$.*

La relation $(R'_k)$ dépend des termes sources par l'intermédiaire des $(\partial_t^l f)_{l\leqslant k-1}$, $(f_p^{(l)})_{l\leqslant k-1}$, $(f_W^{(l)})_{l\leqslant k-1}$ et $(\partial_t^l b)_{l\leqslant k}$.

De même que pour le problème mixte hyperbolique , on a le résultat d'existence de données compatibles à tout ordre suivant :

**Proposition 5.2** *Il existe $a \in H^\infty(\mathbb{R}^n_+, \mathcal{S}(\mathbb{R}_+))$ vérifiant les relations $(R'_k)_{k\in\mathbb{N}}$.*

*Preuve.* On commence par remarquer qu'ils existent des fonctions $(\tilde{I}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de classe $C^\infty$ telles que

(30) $$I_k(x, \theta, (\partial_x^i \partial_\theta^j a)_{i+\frac{j}{2}\leqslant k}) = \partial_\theta^{2k} a + \tilde{I}_k(x, \theta, (\partial_x^i \partial_\theta^j a)_{i+\frac{j}{2}\leqslant k, j<2k}).$$

On obtient ainsi l'existence de fonctions $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in H^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ telles que

$$a_0 = b, \quad I_k(x, \theta, (\partial_x^i a_j)_{i+\frac{j}{2}\leqslant k}) = (\partial_t^k b)|_{t=0} \quad \forall k \geqslant 1.$$

On conduit en utilisant la variante suivante du lemme 3.3 :

**Lemme 5.1** *Soient $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $H^\infty(\mathbb{R}^n_+)$. Il existe une fonction $a \in H^\infty(\mathbb{R}^n_+, \mathcal{S}(\mathbb{R}_+))$ telle que, pour tout entier naturel $k$, $\partial_\theta^k a|_{\theta=0} = a_k$.*

La démonstration suit celle du lemme 3.3, à la différence prés qu'on considère ici une variable suppléméntaire. On exige aussi une décroissance plus rapide à l'infini, mais le procédé démonstratif conduit à une fonction $C^\infty$ à support compact en $\theta$, ce qui assure l'appartenance à $H^\infty(\mathbb{R}^n_+, \mathcal{S}(\mathbb{R}_+))$. $\square$

La preuve précédente assure le résultat suivant :

**Proposition 5.3** *Il existe des fonctions $(\mathcal{A}'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de classe $C^\infty$ telle que, pour $a \in H^\infty(\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}_+)$, les assertions suivantes sont équivalentes :*
*(1). La fonction $a$ vérifie les relations $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$.*
*(2). Pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $y \in \mathbb{R}^{n-1}$,*

$$(\partial_\theta^{2k} a)(x, 0) = \mathcal{A}_k(x, ((\partial_x^i \partial_\theta^j a(x, 0))_{i+\frac{j}{2}, j<2k})).$$

On en déduit le théorème de prolongement suivant pour le problème :

(31) $$\begin{cases} (Id - P_0)W = 0 & \\ (-\partial_\theta^2 + \mathbb{H})W = P_0 f(t, x, p, W) & \text{quand } (t, x, \theta) \in \Omega_T \times \mathbb{R}^+_\theta, \\ W|_{\theta=0} = b & \text{quand } (t, x) \in \Omega_T \end{cases}$$

**Théorème 5.2** *Si $W \in \mathcal{N}(T)$ est solution de (31) avec $T \in ]0, T_0]$ alors il existe un temps $T_1 \in ]T, T_0]$ et un unique prolongement de $W$ en une fonction encore notée $W$ de $\mathcal{N}(T_1)$ solution de*

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{ll} (Id - P_0)W = 0 & \\ (-\partial_\theta^2 + \mathbb{H})W = P_0 f(t,x,p,W) & \text{quand } (t,x,\theta) \in \Omega_{T_1} \times \mathbb{R}_\theta^+, \\ \qquad W|_{\theta=0} = b \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_{T_1} & \end{array} \right.$$

*De plus, soit $T^* := \sup\{T_1 \in ]0, T_0]/$ il existe un prolongement de $W$ en une fonction encore notée $W \in \mathcal{N}(T_1)$ solution de (32)$\}$. Si $T^* < T_0$, on a $||W||_{L^\infty(\Omega_t \times \mathbb{R}_\theta^+)} \to +\infty$ quand $t \to T^*$. Dans le cas linéaire, $T^* = T_0$.*

## 5.5 Le tableau de la cascade

On introduit le problème

$$(S_{cl}^j(T)) : \quad \left\{ \begin{array}{l} \Pi_+ \mathcal{U}^j|_{x_n=\theta=z=0} = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T, \\ (Id - \Pi_+)(\mathcal{U}_a^j|_{x_n=0} + \mathcal{U}_b^j|_{\theta=0} + \mathcal{U}_c^j|_{z=0}) = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_T \end{array} \right. .$$

Le caractère un peu artificiel de ces conditions aux limites provient de ce qu'on a voulu garder une dépendance en $x_n$ au niveau des profils de couche limite. Voilà pourquoi il est nécessaire de faire "baver" les conditions aux limites sur certaines composantes pour les couches limites afin de preserver une certaine unicité. La motivation de la présence du $x_n$ réside en la possibilité de généraliser ces résultats au cas d'un domaine situé localement du même côté de son bord $C^\infty$. Dans ce cas, il apparaît comme plus satisfaisant de définir les profils de couche limite en tous les points de l'espace.

On définit, pour tout $j \geqslant 0$ et $T > 0$, le problème

$$(S^j(T)) : \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathcal{F}}_c^{j-2} = 0, \quad (Id - P_0)\tilde{\mathcal{F}}_b^{j-1} = 0, \quad \tilde{\mathcal{F}}_a^j = P_0 \tilde{\mathcal{F}}_b^j = 0 \\ \quad \text{quand } (t,x,\theta,z) \in \Omega_T \times \mathbb{R}_\theta^+ \times \mathbb{R}_z^+, \end{array} \right. .$$

L'équivalence entre l'annulation des profils $(\tilde{\mathcal{F}}^j)_{j \geqslant -2}$ et la suite de problèmes $(S^j)_{j \geqslant 0}$ est mise en lumière par le tableau suivant :

| | $(S^0)$ | $(S^1)$ | $(S^2)$ | ... |
|---|---|---|---|---|
| $\tilde{\mathcal{F}}^{-2}$ | $\tilde{\mathcal{F}}_c^{-2}$ | | | |
| $\tilde{\mathcal{F}}^{-1}$ | $(Id - P_0)\tilde{\mathcal{F}}_b^{-1}$ | $\tilde{\mathcal{F}}_c^{-1}$ | | |
| $\tilde{\mathcal{F}}^{0}$ | $P_0\tilde{\mathcal{F}}_b^0$ ; $\tilde{\mathcal{F}}_a^0$ | $(Id - P_0)\tilde{\mathcal{F}}_b^0$ | $\tilde{\mathcal{F}}_c^0$ | |
| $\tilde{\mathcal{F}}^{1}$ | | $P_0\tilde{\mathcal{F}}_b^1$ ; $\tilde{\mathcal{F}}_a^1$ | $(Id - P_0)\tilde{\mathcal{F}}_b^1$ | $\tilde{\mathcal{F}}_c^1$ |
| ... | | | | |

Chaque terme de la première colonne est la somme de la ligne correspondante.

De plus, lors de la résolution successive (pour $j$ croissant) des problèmes $(S^j)_{j\geqslant 0}$, seul le profil inconnu $U^j$ intervient : les profils correspondant à des indices $k$ strictement inférieurs à $j$ ont alors déjà été déterminés et les profils correspondant à des indices $k$ strictement supérieurs ont été effacés.

Lorsque les problèmes $(S^j(T))_{0\leqslant j\leqslant N}$ sont vérifiés, les premiers termes non nuls que l'on a au niveau de l'ansatz de résolution sont

$$\sqrt{\varepsilon}^{N-1}\tilde{\mathcal{F}}_c^{N-1}+\sqrt{\varepsilon}^{N}((Id-P_0)\tilde{\mathcal{F}}_b^{N}+\tilde{\mathcal{F}}_c^{N}).$$

On a ainsi un reste de la forme $\sqrt{\varepsilon}^N R_\varepsilon$ avec $(R_\varepsilon)_\varepsilon\in\mathcal{H}^s(T)$. Ceci permet notamment de montrer le théorème 3.4.
Dans le cas d'un développement à un seul terme, on ne résout que $(S^0(T))$. On a alors un reste de la forme

$$(Id-P_0)\tilde{\mathcal{F}}_b^0+\sqrt{\varepsilon}(P_0\tilde{\mathcal{F}}_b^1+\tilde{\mathcal{F}}_a^1)$$

(il n'y a pas de $\mathcal{U}_c^1$ donc pas non plus de $\tilde{\mathcal{F}}_c^1$). Ainsi, on a un reste $\varepsilon^{\frac{1}{4}}R_\varepsilon$ avec $(R_\varepsilon)_\varepsilon\in\mathcal{H}^s(T)$. Dans les cas extrêmes $d_0=0$ ou $d_0=L$, on a même un reste $\varepsilon^{\frac{1}{2}}R_\varepsilon$ avec $(R_\varepsilon)_\varepsilon\in\mathcal{H}^s(T)$. Cela découle de ce que dans les deux cas, $P_0U_b^1$ et, par suite, $P_0\tilde{\mathcal{F}}_b^1$, est nul. L'analyse des problèmes $(S^j(T))$ et $(S_{cl}^j(T))$ infra montre que dans ce cas, on a que $U_a^1$, est nul et par suite $\tilde{\mathcal{F}}_a^1$ l'est aussi. Ces remarques permettent de démontrer le théorème 3.6.

Pour les conditions aux limites, on a l'équivalence suivante : $\mathcal{U}^j$ vérifie $(S_{cl}^j(T))$ si et seulement si

$$\begin{aligned} P_+U^j|_{x_n=\theta=z=0}&=0\quad\text{quand } (t,x)\in\Gamma_T\\ (Id-P_+)(U_a^j|_{x_n=0}+U_b^j|_{\theta=0}+U_c^j|_{z=0})&=0\quad\text{quand } (t,x)\in\Omega_T\end{aligned}$$

## 5.6 $(S^0(T))$ et $(S_{cl}^0(T))$

Définissons les problèmes :

$$(33)\qquad\left\{\begin{array}{l}\tilde{\mathcal{H}}U_a^0=F(t,x,U_a^0)+f(t,x)\quad\text{quand } (t,x)\in\Omega_T\\ P_+U_a^0=0\quad\text{quand } (t,x)\in\Gamma_T\end{array}\right.$$

$$(34)\qquad\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}(Id-P_0)U_b^0=0\\ (-\partial_\theta^2+\mathbb{H})U_b^0=P_0(\tilde{F}(t,x,U_a^0+U_b^0)-\tilde{F}(t,x,U_a^0))\end{array}\right\}\text{quand}\\ (t,x,\theta)\in\Omega_T\times\mathbb{R}_\theta^+\\ U_b^0|_{\theta=0}=-P_0U_a^0\quad\text{quand } (t,x)\in\Omega_T.\end{array}\right.$$

et

$$(35)\qquad\left\{\begin{array}{l}-\partial_z^2U_c^0+\Lambda\partial_zU_c^0=0\quad\text{quand } (t,x,z)\in\Omega_T\times\mathbb{R}_z^+,\\ U_c^0|_{z=0}=-P_-U_a^0\quad\text{quand } (t,x)\in\Omega_T.\end{array}\right.$$

On note $(R^0_{k,a})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(R^0_{k,a})_{k\in\mathbb{N}}$ les relations de compatibilité respectivement associées aux problèmes (33) et (34) par les théorèmes 3.10 et 5.2. Les $(R^0_{k,a})_{k\in\mathbb{N}}$ ne dépendent que des données du problème alors que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(R^0_{k,b})$ dépend aussi des $(\partial_t^l U_a^0)_{l\leqslant k}|_{t=0}$.

On note $\overline{(R^0_{k,b})}$ la relation obtenue en substituant aux $(\partial_t^l U_a^0)_{l\leqslant k}|_{t=0}$ les expressions en les restrictions des dérivées spatiales $(\partial_x^l U_a^0)_{l\leqslant k}|_{t=0}$ données par (22).

Résoudre $(S^0(T))$ et $(S^0_{cl}(T))$ revient à résoudre le problème limite (33) puis dans l'ordre que l'on veut (34) et (35), ce que l'on notera $\begin{matrix}(34)\\(35)\end{matrix}$ En effet, tenant compte des polarisations $(Id-P_0)U_b^0=0$ et $(Id-P_-)U_c^0=0$, les conditions aux limites se scindent en

$$P_+U_a^0=0,\quad U_b^0|_{\theta=0}+P_0U_a^0=0 \quad \text{et} \quad U_c^0|_{z=0}+P_-U_a^0=0.$$

Aux ordres supérieurs, les différents types de termes composant les profils sont couplés par les conditions aux limites. La résolution des problèmes $(S^j(T))$ et $(S^j_{cl}(T))$ s'en trouve compliquée.

### 5.7 $(S^j(T))$-$(S^j_{cl}(T))$ ; $j\geqslant 1$

Pour chaque $j\geqslant 1$, lors de la résolution $(S^j(T))$, on est confronté au problème suivant :

$$\tilde{\mathcal{H}}U_a^j=\Phi_a^j \quad \text{quand } (t,x)\in\Omega_T \tag{36}$$
$$\Lambda\partial_\theta(Id-P_0)U_b^j=\Phi_{b,1}^j \quad \text{quand } (t,x,\theta)\in\Omega_T\times\mathbb{R}^+_\theta \tag{37}$$
$$(-\partial_\theta^2+\mathbb{H})P_0U_b^j=\Phi_{b,2}^j \quad \text{quand } (t,x,\theta)\in\Omega_T\times\mathbb{R}^+_\theta \tag{38}$$
$$-\partial_z^2U_c^j+\Lambda\partial_zU_c^j=\Phi_c^j \quad \text{quand } (t,x,z)\in\Omega_T\times\mathbb{R}^+_z$$

où

$$\begin{aligned}
\Phi_a^j &:= \tilde{F}'_u(t,x,U_a^0)U_a^j-\tilde{q}_a^j,\\
\Phi_{b,1}^j &:= -(Id-P_0)((\tilde{\mathcal{H}}+\Lambda_n^\flat\theta\partial_\theta-\partial_{\theta\theta})U_b^{j-1}\\
&\quad - \tilde{F}'_u(t,x,U_a^0+U_b^0).(U_a^{j-1}+U_b^{j-1})+\tilde{F}'_u(t,x,U_a^0).U_a^{j-1}+\tilde{q}_b^{j-1}),\\
\Phi_{b,2}^j &:= P_0(\tilde{H}(Id-P_0)U_b^j+\tilde{F}'_u(t,x,U_a^0+U_b^0)(U_a^j+U_b^j)-\tilde{F}'_u(t,x,U_a^0).U_a^j-\tilde{q}_b^j),\\
\Phi_c^j &:= -\tilde{q}_c^{j-2},
\end{aligned}$$

$\Phi_a^j\in H^\infty(\Omega_T)$, $\Phi_{b,1}^j$, $\Phi_{b,2}^j\in H^\infty(\Omega_T,\mathcal{S}(\mathbb{R}^+_\theta))$ et $\Phi_c^j\in H^\infty(\Omega_T,\mathcal{S}(\mathbb{R}^+_z))$.

Pour chaque $j \geqslant 1$, définissons les équations :

$$(39) \qquad (Id - P_-)(-\partial_z^2 + \Lambda\partial_z)U_c^j = (Id - P_-)\Phi_c^j \quad \text{quand } (t,x,z) \in \Omega_T \times \mathbb{R}_z^+$$

les problèmes :

$$(40) \quad \begin{cases} \tilde{\mathcal{H}}U_a^j = \Phi_a^j & \text{quand } (t,x) \in \Omega_T \\ P_+U_a^j = -P_+(U_b^j|_{x_n=\theta=0} + U_c^j|_{x_n=z=0}) & \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T \end{cases},$$

$$(41) \quad \begin{cases} (-\partial_\theta^2 + \mathbb{H})P_0U_b^j = \Phi_{b,2}^j & \text{quand } (t,x,\theta) \in \Omega_T \times \mathbb{R}_\theta^+, \\ P_0U_b^j|_{\theta=0} = -P_0(U_a^j + U_c^j|_{z=0}) & \text{quand } (t,x) \in \Omega_T \end{cases}$$

et

$$(42) \quad \begin{cases} P_-(-\partial_z^2 + \Lambda\partial_z)U_c^j = P_-\Phi_c^j & \text{quand } (t,x,z) \in \Omega_T \times \mathbb{R}_z^+, \\ P_-U_c^j|_{z=0} = -P_-(U_a^j + U_b^j|_{\theta=0}) & \text{quand } (t,x) \in \Omega_T \end{cases}$$

Les équations (37) et (39) jouent un rôle crucial dans la résolution des problèmes $(S^j(T))$ et $(S_{cl}^j(T))$. En effet, on a dit que la difficulté provenait du couplage induit par les équations aux limites. Or les équations (37) et (39) déterminent univoquement $(Id - P_0)U_b^j$ et $(Id - P_-)U_c^j$. Les traces au bord du domaine de ces éléments sont donc imposées par l'équation et ne peuvent pas être prescrites.

On note $(R_{k,a}^j)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(R_{k,b}^j)_{k\in\mathbb{N}}$ les relations de compatibilité respectivement associées à (40) et à (41) par les théorèmes 3.10 et 5.2. $(R_{k,a}^j)$ dépend par l'intermédiaire des termes sources des

$$(\partial_t^l U_a^m)_{l\leqslant k-1; m\leqslant j-1}|_{t=0}$$

et des

$$(\partial_t^l(U_b^j|_{x_n=\theta=0} + U_c^m|_{x_n=z=0}))_{l\leqslant k}|_{t=0}.$$

On note $\overline{(R_{k,a}^j)}$ la relation obtenue en réexprimant d'abord les

$$(\partial_t^l(U_b^j|_{x_n=\theta=0} + U_c^j|_{x_n=z=0}))_{l\leqslant k}|_{t=0}$$

par (37) et (39) au moyen des

$$(\partial_t^l(U_b^m|_{x_n=\theta=0} + U_c^m|_{x_n=z=0}))_{l\leqslant k; m\leqslant j-1}|_{t=0}$$

et, par récurrence et avec (30), au moyen des restrictions à $t = 0$ des

$$(\partial_\theta^{l_1}\partial_x^{l_2}(U_a^m + U_b^m)_{l\leqslant k; m\leqslant j-1}$$

De même, on définit $\overline{(R^j_{k,b})}$.

Résoudre $(S^j(T))$ et $(S^j_{cl}(T))$ revient à résoudre successivement $\begin{matrix}(37)\\(39)\end{matrix}$ puis (40) et enfin $\begin{matrix}(41)\\(43)\end{matrix}$.
Dans notre analyse, le couplage entre CLC et CLNC se fait donc par l'intermédiaire de la partie régulière du profil.

## 5.8 Analyse de la couche limite non caractéristique

La proposition suivante détaille les profils de couche limite non caractéristique. On précise en particulier leur décroissance et on note la polarisation des profils d'ordre 0 et 1.

**Proposition 5.4** *Si pour $N \geqslant 0$ et un $T \geqslant 0$, la famille $(U^j)_{0 \leqslant j \leqslant N}$ satisfait $(S^j(T))_{0 \leqslant j \leqslant N}$ et $(S^j_{cl}(T))_{0 \leqslant j \leqslant N}$ alors pour tout $0 \leqslant j \leqslant N$, le profil $U^j_c$ est de la forme suivante :*

$$U^j_c = \sum_{k=1}^{N} \alpha^j_k(t,x,z) r_k(t,x)$$

*avec pour $k \in I_-$*

$$\alpha^0_k(t,x,z) := C^{k,0}_i(t,x) e^{\lambda_k(t,y)z}$$
$$\alpha^j_k(t,x,z) := \sum_{i=0}^{j-1} C^{k,j}_i(t,x) z^i e^{\lambda_k(t,y)z} \quad \text{quand } j \geqslant 1$$

*et pour $k \in I_0 \cup I_+$*

$$\alpha^j_k(t,x,z) := 0 \quad \text{quand } j = 0,1$$
$$\alpha^j_k(t,x,z) := \sum_{l \in I_-} \sum_{i=0}^{j-2} C^{k,j,l}_i(t,x) z^i e^{\lambda_l(t,y)z} \quad \text{quand } j \geqslant 2.$$

## 5.9 Résolution des équations de profils avec donnée polarisée

Le résultat suivant montre que la prescription d'une partie seulement des profils (la partie régulière et la partie polarisée de la couche limite caractéristique) suffit à la détermination univoque d'un développement solution des problèmes $(S^j(T))_{j \geqslant 0}$ et $(S^j_{cl}(T))_{j \geqslant 0}$ pour un $T > 0$.

**Théorème 5.3** *Soit $N$ un entier et des fonctions*

$$(U^j_{init} := U^j_{init,a} + U^j_{init,b})_{0 \leqslant j \leqslant N} \in \mathcal{P}^{N+1}_{init}$$

*telles que, pour $0 \leqslant j \leqslant N$, $(Id - P_0)U^j_{init,b} = 0$, le profil $\overline{U^j_{init,a}}$ vérifie les relations de compatibilité $(\overline{R^j_{k,a}})_{k\in\mathbb{N}}$ et $\overline{U^j_{init,b}}$ les relations $(\overline{R^j_{k,b}})_{k\in\mathbb{N}}$. Il existe $T > 0$ et une unique famille $(U^j)_{0\leqslant j\leqslant N}$ dans $(\mathcal{P}(\Omega_T))^{N+1}$ telle que les problèmes $(S^j(T))_{0\leqslant j\leqslant N}$, $(S^j_{cl}(T))_{0\leqslant j\leqslant N}$ soient vérifiées et telle que, pour $0 \leqslant j \leqslant N$, $U^j_a|_{t=0} = U^j_{init,a}$, $P_0U^j_b|_{t=0} = U^j_{init,b}$. De plus, $T$ ne dépend que de $U^0_a + U^0_b$.*

*Preuve.* On introduit les notations suivantes : on note

$$\left\{\begin{array}{l} \tilde{\mathcal{H}}U^0_a = F(t,x,U^0_a) \quad \text{quand } (t,x)\in\Omega_T \\ P_+U^0_a = 0 \quad \text{quand } (t,x)\in\Gamma_T \\ U^0_a = U^0_{a,init} \quad \text{quand } t=0 \end{array}\right. \tag{43}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} (Id-P_0)U^0_b = 0 \\ (-\partial^2_\theta + \mathbb{H})U^0_b = P_0 f(t,x,p,U^0_b) \end{array}\right\} \quad \text{quand } (t,x)\in\Omega_T\times\mathbb{R}^+_\theta, \\ U^0_b|_{\theta=0} = -P_0U^0_a \quad \text{quand } (t,x)\in\Omega_T \\ U^0_b = U^0_{b,init} \quad \text{quand } t=0 \end{array}\right. \tag{44}$$

et pour chaque $j \geqslant 1$, les problèmes :

$$\left\{\begin{array}{l} \tilde{\mathcal{H}}U^j_a = \Phi^j_a \quad \text{quand } (t,x)\in\Omega_T \\ P_+U^j_a = -P_+(U^j_b|_{x_n=\theta=0} + U^j_c|_{x_n=z=0}) \quad \text{quand } (t,x)\in\Gamma_T \\ U^j_a = U^j_{a,init} \quad \text{quand } t=0 \end{array}\right. \tag{45}$$

$$\left\{\begin{array}{l} (-\partial^2_\theta + \mathbb{H})P_0U^j_b = \Phi^j_{b,2} \quad \text{quand } (t,x,\theta)\in\Omega_T\times\mathbb{R}^+_\theta, \\ P_0U^j_b|_{\theta=0} = -P_0(U^j_a + U^j_c|_{x_n=z=0}) \quad \text{quand } (t,x)\in\Omega_T \\ U^j_b = U^j_{b,init} \quad \text{quand } t=0 \end{array}\right. \tag{46}$$

Le théorème 3.10 assure l'existence d'un temps $T_0 > 0$ et d'une solution de (43). Le théorème 5.1 assure alors l'existence d'un temps $T \in ]0, T_0]$ et d'une solution à (44). Les versions linéaires des théorèmes 3.10 et 5.1 assurent l'existence de solutions à la suite de problèmes $\begin{matrix}(37)\\(39)\end{matrix}$ puis (43) et enfin $\begin{matrix}(45)\\(46)\end{matrix}$, pour $j = 1, .., \infty$. $\square$

## 5.10 Données de Cauchy compatibles

On remarque que $\partial_\theta$ est un automorphisme de $H^\infty(\Omega_T, \mathcal{S}(\mathbb{R}^+_\theta))$ et on note $\partial_\theta^{-1}$ son inverse. On note, pour $k\in\mathbb{N}^*$ et $u \in (\mathcal{P}(\Omega_T))^k$, $u := (u_1, ..., u_k)$, $U_b :=$

$(U_{b,1}, ..., U_{b,k})$ où, pour $1 \leqslant i \leqslant k$, $u_i := U_{a,i} + U_{b,i} + U_{c,i}$. On définit aussi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'opérateur :

$$T_k : (\mathcal{P}(\Omega_T))^k \to ((\mathcal{P}(\Omega_T))^k)^3$$
$$u \to (u, U_b, \partial_\theta^{-1} U_b)$$

Nous appellerons $\mathcal{O}$ l'ensemble des opérateurs $\mathbb{F}$ de $\mathcal{P}(\Omega_T)^{k_1}$ dans $\mathcal{P}(\Omega_T)$ qui s'écrivent pour une famille d'indices entiers $k_1, ..., k_\nu$ : $\mathbb{F} = F_\nu o T_{k_\nu} o ... o F_1 o T_{k_1}$ où les $F_j$ sont des fonctions $C^\infty$ de $\mathbb{R}^{3k_j}$ dans $\mathbb{R}^{k_{j+1}}$. On note $\partial_\tau$ la collection des $(\partial_i)_{i=0,...,n}$ et de $\theta\partial_\theta$.

Le théorème suivant met en évidence des conditions nécessairement vérifiées par les dérivées temporelles des profils.

**Théorème 5.4** *Il existe trois familles $(F_{j,k})_{j\in\mathbb{N}^*,k\in\mathbb{N}}$, $(G_j)_{j\in\mathbb{N}}$ et $(H_{j,h})_{j\in\mathbb{N},h\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathcal{O}$ telles que si la famille $(U^j)_{0\leqslant j\leqslant N}$ vérifient la suite de problèmes $(S^j(T))_{0\leqslant j\leqslant N}$, $(S^j_{cl}(T))_{0\leqslant j\leqslant N}$ alors*

$$(Id - P_0)U_b^0 = 0,$$

*pour $j = 1, ..., N$ et $k \in \mathbb{N}$*

$$\partial_t^k (Id - P_0)U_b^j = F_{j,k}(t, x, \theta, \partial_\eta^{\alpha_p}(U_a^p + P_0 U_b^p), 0 \leqslant p \leqslant j-1,$$
$$0 \leqslant \alpha_p + 2(p-j) \leqslant k),$$

*et pour $j = 0, ..., N$*

$$U_c^j = G_j(t, x, z, \partial_\eta^{\beta_p}(U_a^p \overset{\circ}{+} P_0 U_b^p), 0 \leqslant p \leqslant j, 0 \leqslant \beta_p + p \leqslant j),$$

*pour $j = 0, ..., N$ et $h \in \mathbb{N}^*$,*

$$\partial_t^h (U_a^j + P_0 U_b^j + P_- U_c^j) = H_{j,h}(t, x, \theta, \partial_\eta^{\beta_p}(U_a^p + P_0 U_b^p), 0 \leqslant p \leqslant j,$$
$$0 \leqslant \beta_p + p \leqslant j + h).$$

*Preuve.* Les propriétés de polarisation de la couche limite caractéristique sont très analogues à celles mises en évidence lors de l'étude de la propagation d'oscillations à une seule phase. ([11]) La présence d'une couche non caractéristique vient cependant compliquer les choses. Aussi nous commençons par un lemme obtenu par l'analyse de la cascade et la proposition 5.4.

**Lemme 5.2** *Il existe une famille de fonctions $(\tilde{S}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de classe $C^\infty$ de leurs arguments telle que*

$$U_c^0 = \tilde{S}_0(t, x, U_a^0), \quad U_c^1 = \tilde{S}_1(t, x, U_a^1),$$

$$U_c^j = \tilde{S}_j(t, x, z, (U_a^k, U_c^k)_{k\leqslant j-2}, (\partial_\theta^i \overset{\circ}{U_b^k})_{i+k\leqslant j-2}, \partial_{t,x} U_c^{j-2}, U_a^j, \overset{\circ}{U_b^j}) \quad \text{quand } j = 2, 3$$

$$U_c^j = \tilde{S}_j(t, x, z, (U_a^k, U_c^k)_{k\leqslant j-2}, (\partial_\theta^i \overset{\circ}{U_b^k})_{i+k\leqslant j-2}, \partial_{t,x} U_c^{j-2}, (\partial_x^\beta U_c^{j-4})_{\beta=1,2}, U_a^j, \overset{\circ}{U_b^j})$$
$$\text{quand } j \geqslant 4.$$

Une simple récurrence permet alors d'obtenir :

**Lemme 5.3** *Il existe une famille de fonctions* $(S_j)_{j\in\mathbb{N}}$ $C^\infty$ *de leurs arguments telle que*

$$U_c^j = S_j(t,x,z,(\partial_\tau^i(\overset{\circ}{U_a^k},U_b^k))_{i+k\leqslant j}).$$

Le théorème 5.4 résulte par récurrence sur $j$ du lemme suivant :

**Lemme 5.4** *Il existe deux familles de fonctions* $(R_{j,k})_{j\in\mathbb{N}^*,k\in\mathbb{N}}$ *et* $(S_{j,h})_{j\in\mathbb{N}^*,h\in\mathbb{N}^*}$ *d'éléments de* $\mathcal{O}$ *telles que pour* $k\in\mathbb{N}$*,* $h\in\mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}\partial_t^k(Id-P_0)U_b^j = R_{j,k}(t,x,\theta,\partial_\eta^\alpha(U_a^j+P_0U_b^j),\partial_\tau^\alpha(U_a^p,U_b^p);\\ 0\leqslant p\leqslant j-1, 0\leqslant\alpha\leqslant k+2),\end{aligned}\tag{47}$$

$$\begin{aligned}\partial_t^h(U_a^j+P_0U_b^j) = S_{j,h}(t,x,\theta,\partial_\eta^\alpha(U_a^j+P_0U_b^j),\partial_\tau^\beta(U_a^p,U_b^p);\\ 0\leqslant p\leqslant j-1, 0\leqslant\alpha\leqslant h, 0\leqslant\beta\leqslant h+1).\end{aligned}\tag{48}$$

Preuve : on va montrer que ce lemme est vrai pour $h=k+1$ pour tout $k\in\mathbb{N}$, par récurrence sur $k$. Commençons par le cas $k=0$ : par (37), on a l'existence de $R_{j,0}\in\mathcal{O}$ tel que

$$\begin{aligned}(Id-P_0)U_0^j = R_{j,0}(t,x,\theta,\partial_\eta^\alpha(U_a^j+P_0U_b^j),\partial_\tau^\alpha(U_a^p+P_0U_b^p,\\ (Id-P_0)U_b^p);0\leqslant p\leqslant j-1,0\leqslant\alpha\leqslant 2)\end{aligned}\tag{49}$$

puis $\partial_t U_a^j$ est déterminé par (36). (38) assure alors l'existence de $F\in\mathcal{O}$ tel que

$$\partial_t P_0 U_b^j = F(t,x,\theta,(\partial_\eta^\alpha P_0U_b^j)_{\alpha=0,1},(\partial_\tau^\beta(U_a^p+P_0U_b^p,(Id-P_0)U_b^p))_{\beta\leqslant 2})$$

Utilisant (49), on obtient alors (48) pour $h=1$. On montre ensuite l'hérédité en dérivant par rapport au temps. □

**Remarque 5.1** *Lors de l'étude de l'optique géomètrique à une seule phase, on considère des développements de la forme*

$$\sum_{j\geqslant 0}\varepsilon^j U^j(x,\frac{\phi(x)}{\varepsilon})$$

*où les profils* $U^j$ *sont dans* $H^\infty(\Omega_T\times S^1)$*. La résolution de la cascade d'équations BKW fait intervenir un opérateur de projection moyenne* $\mathcal{E}_p$*.*
*Notant* $\bar{U}:=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U(x,\theta)d\theta$ *la moyenne de* $U$ *et* $U^*:=U-\bar{U}$ *la fluctuation, on a les analogies suivantes :*

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_pU &\leftrightarrow U_a^0+P_0U_b^0\\ (Id-\mathcal{E})U_p &\leftrightarrow (Id-P_0)U_b^0\\ U^* &\leftrightarrow U_b^0\end{aligned}$$

Le théorème suivant donne les conditions nécessaires et suffisantes que doivent vérifier des conditions initiales pour que l'on puisse construire le développement correspondant. Soient pour $j \geqslant 0$ et $U^j_{init} \in \mathcal{P}_{init}$, $(S^j_{init}) : \quad U^j|_{t=0} = U^j_{init}$.

**Théorème 5.5** *Soient* $(U^j_{init})_{0 \leqslant j \leqslant N} \in \mathcal{P}^{N+1}_{init}$ . *On définit les assertions suivantes :*
(1). *Les fonctions* $(U^j_{init})_{0 \leqslant j \leqslant N}$ *vérifient les relations* $(R_j)_{0 \leqslant j \leqslant N}$ *où :*

$$(R_0) : \quad \begin{cases} (Id - P_0)U^0_{init,b} = 0 \\ U^0_{init,c} = G_0(0, x, z, \partial_\eta(U^0_{init,a} + P_0 U^0_{init,b})) \end{cases}$$

*et pour* $j \geqslant 1$,

$$(R_j) : \quad \begin{cases} (Id - P_0)U^j_{init,b} = F_{j,0}(0, x, \theta, \partial^{\alpha_p}_\eta(U^p_{init,a} + P_0 U^p_{init,b}), 0 \leqslant p \leqslant j-1, \\ 0 \leqslant \alpha_p + 2(p-j) \leqslant k)) \\ U^j_{init,c} = G_j(0, x, z, \partial^{\beta_p}_\eta(U^p_{init,a} + P_0 U^p_{init,b}), 0 \leqslant p \leqslant j, 0 \leqslant \beta_p + p \leqslant j) \end{cases}$$

$(1')$. *Pour* $0 \leqslant j \leqslant N$, $\quad U^j_{init,a}$ *vérifie les relations* $(\overline{R^j_{k,a}})_{k \in \mathbb{N}}$ *et* $P_0 U^j_{init,b}$ *vérifient les relations* $(\overline{R^j_{k,b}})_{k \in \mathbb{N}}$
(2). *Il existe* $T > 0$ *et une unique famille* $(U^j)_{0 \leqslant j \leqslant N} \in \mathcal{P}(\Omega_T)^{N+1}$ *vérifient* $(S^j(T))_{0 \leqslant j \leqslant N}$, $(S^j_{cl}(T))_{0 \leqslant j \leqslant N}$ *et* $(S^j_{init})_{0 \leqslant j \leqslant N}$.

*Alors* $(1)$ *et* $(1')$ *sont équivalents à* $(2)$. *De plus, si* $(2)$ *est vérifiée,* $T$ *ne dépend que de* $U^0_a + U^0_b$.

*Preuve.* Les relations sont nécessaires d'après le théorème 5.4. Réciproquement, si les assertions (1) et $(1')$ du théorème 5.5 sont vérifiées, le théorème 5.3 appliqué à la famille

$$(\tilde{U}^j_{init} := U^j_{init,a} + P_0 U^j_{init,b} + U^j_{init,c})_{0 \leqslant j \leqslant N}$$

assure l'existence de $T$ strictement positif et d'une unique famille $(U^j)_{0 \leqslant j \leqslant N}$ de profils dans $\mathcal{P}(\Omega_T)$ tels que pour $0 \leqslant j \leqslant N$, les problèmes $(S^j(T))$, $(S^j_{cl}(T))$ soient vérifiées et

$$(U^j_a + P_0 U^j_b + U^j_{init,c})|_{t=0} = \tilde{U}^j_{init}.$$

Les profils $(U^j)_{0 \leqslant j \leqslant N}$ vérifient les conditions nécessaires du théorème 5.4. En particulier,

$$(Id - P_0)U^0_b|_{t=0} = 0$$

et, pour $j \geqslant 1$,

$$(Id - P_0)U^j_b|_{t=0} = F_{j,0}(0, x, \partial^{\alpha_p}_\eta(U^p_a + P_0 U^p_b), 0 \leqslant p \leqslant j-1,$$
$$0 \leqslant \alpha_p + 2(p-j) \leqslant k).$$

Jointes aux relations $(R_j)$, cela donne :

$$(Id - P_0)U_b^j|_{t=0} = (Id - P_0)U_{b,init}^j. \quad \square$$

On définit $\mathcal{P}_{init,N}$ comme l'ensemble des données $(U_{init}^j)_{0 \leqslant j \leqslant N} \in (\mathcal{P}_{init})^{N+1}$ vérifiant les points 1 et 1' du théorème 5.5. Le théorème 4.1 découle alors du théorème précédent.

# 6 Preuve du théorème 3.1

On va se concentrer ici sur le cas $M > \frac{1}{4}$, indiquant brievement en fin de démonstration les modifications nécessaires à apporter dans le cas critique $M = \frac{1}{4}$. Notons $\underline{w_\varepsilon} := \varepsilon^{-M}(u^\varepsilon - a^\varepsilon) \in \Lambda^m(T_0)$ et introduisons le problème de prolongement parabolique :

$$\mathbb{P}^R(T): \quad \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{H} - \varepsilon\mathcal{E})w_\varepsilon = G(t, x, a^\varepsilon, \varepsilon^M w_\varepsilon)w_\varepsilon + g_\varepsilon \quad \text{quand } (t, x) \in \Omega_T \\ w_\varepsilon = 0 \quad \text{quand } (t, x) \in \Gamma_T \\ w_\varepsilon = \underline{w_\varepsilon} \quad \text{quand } t \in (0, T_0) \end{array} \right.$$

où $G$ est telle que $F(t, x, u + v) - F(t, x, u) = G(t, x, u, v).v$.
$\underline{w_\varepsilon}$ vérifie $\mathbb{P}^R(T_0)$.

Une remarque essentielle est que si le problème est non linéaire, les non linéarités sont multipliées par des $\varepsilon$, ce qui assure l'existence de solutions jusqu'en $T$, et cela pour toute une gamme de $\varepsilon$ petits. On peut parler de "$\varepsilon$-non linéarité". Il résulte du théorème 3.7 que pour tout $\varepsilon \in ]0, 1]$, il existe $w_\varepsilon$ solution de $\mathbb{P}^R(T_\varepsilon)$ où $T_\varepsilon > 0$. Compte-tenu de la condition d'explosion, on pourrait travailler directement sur la solution et dériver une estimation à priori en $||.||_\infty$ qui assure l'existence jusqu'en $T$. C'est la démarche retenue dans [18]. Fidèle à [11] et [10], on préfère ici revenir à un schéma itératif dont on montre la convergence, uniformément en $\varepsilon$, sur $(0, T)$.

On commence par établir des estimations conormales pour le problème linéaire :

$$\begin{aligned} (-\varepsilon\mathcal{E} + \mathcal{H})w_\varepsilon &= f \quad \text{quand } (t, x) \in \Omega_T \\ w_\varepsilon &= 0 \quad \text{quand } (t, x) \in \Gamma_T \\ w_\varepsilon &= \underline{w_\varepsilon} \quad \text{quand } t \in (0, T_0) \end{aligned}$$

On notera pour $\lambda \geqslant 1$, $|u||_{0,\lambda,T} := ||e^{-\lambda t}u||_{L^2(\Omega_T)}$ et

$$|u||_{m,\lambda,T} := \sum_{2j+k \leqslant m} \lambda^{m-(2j+k)} |\partial_t^j Z'^k u||_{0,\lambda,T}.$$

**Proposition 6.1** *Soit $m$ un entier. Il existe $\lambda_m \geqslant 1$ tel que pour $\lambda \geqslant \lambda_m$ et pout tout $\varepsilon \in ]0, 1]$ :*

$$\varepsilon|\nabla_x w||_{m,\lambda,T}^2 + \lambda|w||_{m,\lambda,T}^2 \leqslant \lambda^{-1}\lambda_m(|f||_{m,\lambda,T}^2 + |\underline{w}||_{m,\lambda,T_0}^2). \tag{50}$$

Preuve : Pour $m = 0$, l'inégalité d'énergie classique donne :

(51) $$\varepsilon|\nabla_x w||^2_{0,\lambda,T} + \lambda|w||^2_{0,\lambda,T} \leqslant \lambda^{-1}\lambda_0(| < f, w >_{0,\lambda,T} + |\underline{w}||^2_{0,\lambda,T_0})$$

pour $\lambda$ plus grand qu'un $\lambda_0$. On déduit alors (50) en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
On procède ensuite par récurrence sur $m$. Supposons (50) vérifié pour $0, ..., m-1$. Appliquons pour $2j + k \leqslant m$, $\partial_t^j Z'^k$ à l'équation. Utilisant (51), il vient

$$\varepsilon(\lambda^{m-(2j+k)}|\nabla_x \partial_t^j Z'^k w||_{0,\lambda,T})^2 + \lambda(\lambda^{m-(2j+k)}|\partial_t^j Z'^k w||_{0,\lambda,T})^2 \leqslant \\ \lambda^{-1}\lambda_0(\lambda^{2(m-(2j+k))}| < \tilde{f}, \partial_t^j Z'^k w >_{0,\lambda,T} | + |\underline{w}||^2_{m,\lambda,T_0})$$

où $\tilde{f} := \partial_t^j Z'^k f + [\mathcal{H}, \partial_t^j Z'^k]w + [\varepsilon\mathcal{E}, \partial_t^j Z'^k]w$.

Voyons comment traiter le terme $\lambda^{2(m-(2j+k))}| < \tilde{f}, \partial_t^j Z'^k w >_{0,\lambda,T} |$.

• Utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, le terme

$$\lambda^{2(m-(2j+k))}| < \partial_t^j Z'^k f, \partial_t^j Z'^k w >_{0,\lambda,T} |$$

est majoré, en valeur absolue, par

$$(\lambda^{m-(2j+k)}|\partial_t^j Z'^k f||_{0,\lambda,T})(\lambda^{m-(2j+k)}|\partial_t^j Z'^k w||_{0,\lambda,T}$$

soit encore par

$$\lambda^{-1}c_\delta\lambda^{m-(2j+k)}|\partial_t^j Z'^k f||_{0,\lambda,T} + \lambda\delta\lambda^{m-(2j+k)}|w||_{0,\lambda,T}.$$

Pour $\delta$ assez petit, le terme $\lambda\delta\lambda^{m-(2j+k)}|w||_{0,\lambda,T}$ est "absorbée" dans le membre de gauche.

• Voyons comment majorer les "pires" termes de

$$\lambda^{2(m-(2j+k))}| < [\varepsilon\mathcal{E}, \partial_t^j Z'^k w], \partial_t^j Z'^k w >_{0,\lambda,T} |$$

c'est-à-dire ceux qui contiennent deux dérivées normales et sont de la forme :

$$\lambda^{2(m-(2j+k))}| < \varepsilon A\partial_n B\partial_n C\partial_t^{j'} Z'^{k'} w, \partial_t^j Z'^k w >_{0,\lambda,T} |$$

avec $2j' + k' \leqslant m - 1$. Intégrant par parties, on est ramené à contrôler

$$\varepsilon\lambda^{2(m-(2j+k))}|\partial_n\partial_t^j Z'^k w||_{0,\lambda,T}|\partial_n\partial_t^{j'} Z'^{k'} w||_{0,\lambda,T}$$

que l'on majore par

$$\varepsilon\delta\lambda^{m-(2j+k)}|\partial_n\partial_t^j Z'^k w||^2_{0,\lambda,T} + \varepsilon c_\delta\lambda^{m-(2j+k)}|\partial_n\partial_t^{j'} Z'^{k'} w||^2_{0,\lambda,T}$$

où $\delta$ est pris suffisamment petit pour que le second terme soit absorbé dans le membre de gauche. Le premier terme est contrôlé par l'hypothèse de récurrence.

• Il reste à contrôler $\lambda^{2(m-(2j+k))}| < [\mathcal{H}, \partial_t^j Z'^k]w, \partial_t^j Z'^k w >_{0,\lambda,T} |$.
Pour cela, écrivons $A_n = \mathring{A}_n + x_n A_n^\flat$ et $\mathcal{H} = \mathcal{H}^\flat + \mathring{A}_n \partial_n$ où

$$\mathcal{H}^\flat := \sum_{i=0}^{n-1} A_i Z_i + A_n^\flat Z_n.$$

On doit donc contrôler des termes de la forme

$$\lambda^{2(m-(2j+k))}| < [A_i Z_i, \partial_t^j Z'^k]w, \partial_t^j Z'^k w >_{0,\lambda,T} |, \tag{52}$$

$$\lambda^{2(m-(2j+k))}| < [A_n^\flat Z_n, \partial_t^j Z'^k]w, \partial_t^j Z'^k w >_{0,\lambda,T} |, \tag{53}$$

$$\lambda^{2(m-(2j+k))}| < [\mathring{A}_n \partial_n, \partial_t^j Z'^k]w, \partial_t^j Z'^k w >_{0,\lambda,T} |. \tag{54}$$

Les termes (52) et (53) peuvent être majorés par

$$cte\lambda^{m-(2j+k)}|\partial_t^j Z'^k w||^2_{0,\lambda,T}$$

et sont absorbés dans le membre de gauche de (50).
Pour (54), on remarque que l'on a par l'équation :

$$\mathring{A}_n \partial_n w := f - \mathcal{H}^\flat w + \varepsilon \mathcal{E} w$$

ce qui nous ramène à des cas précédents. $\square$

On utilise le shéma itératif $(w^\nu)_{\nu \geqslant 0}$ défini par

$$\begin{aligned} w^0 &:= \underline{w_\varepsilon} \quad \text{quand } t \in (0, T_0) \\ w^0 &:= \underline{w_\varepsilon}(T_0) \quad \text{quand } t \in (T_0, T) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (-\varepsilon\mathcal{E} + \mathcal{H})w^{\nu+1} = G(t, x, a^\varepsilon, \varepsilon^M w^\nu)w^{\nu+1} + g_\varepsilon &\quad \text{quand } (t, x) \in \Omega_T \\ w^{\nu+1} = 0 &\quad \text{quand } (t, x) \in \Gamma_T \\ w^{\nu+1} = \underline{w_\varepsilon} &\quad \text{quand } t \in (0, T_0) \end{aligned}$$

On notera dans la suite $||.||_\infty$ au lieu de $||.||_{L^\infty(\Omega_T)}$.

**Proposition 6.2** *Soit $\mu > 0$ fixé. Il existe $\lambda_1 > 0$ tel que si $\varepsilon^M ||w^\nu||_\infty \leqslant \mu$ alors*

$$\varepsilon|\nabla_x w^{\nu+1}||^2_{m,\lambda,T} + \lambda|w^{\nu+1}||^2_{m,\lambda,T} \leqslant \lambda^{-1}\lambda_1(|g_\varepsilon||^2_{m,\lambda,T} + |\underline{w}||^2_{m,\lambda,T_0}$$

$$+(|w^{\nu+1}||_{m,\lambda,T} + \varepsilon^M ||w^{\nu+1}||_\infty |w^\nu||_{m,\lambda,T})^2). \tag{55}$$

Preuve : Il s'agit d'estimer en norme $|.||^2_{0,\lambda,T}$ des termes de la forme

$$\lambda^{m-|\alpha|}Z^\alpha(G(t,x,a,\varepsilon^M w^\nu)w^{\nu+1}) \tag{56}$$

où $|\alpha| \leqslant m$. Lorsqu'on développe (56), on obtient deux types de termes :

- ceux où $w^\nu$ n'est pas dérivé. Ils sont contrôlés par $cte|w^{\nu+1}||^2_{m,\lambda,T}$ et pour $\lambda$ assez grand sont absorbés dans le membre de gauche de (55).
- ceux où $w^\nu$ est dérivé. Ils sont de la forme

$$\lambda^{m-|\alpha|}\Phi^\varepsilon(t,x)Z^{\beta_1}a...Z^{\beta_i}aZ^{\gamma_1}(\varepsilon^M w^\nu)...Z^{\gamma_j}(\varepsilon^M w^\nu)Z^\delta w^{\nu+1}$$

où $\Phi^\varepsilon(t,x)$ est uniformément borné dans $L^\infty$ et

$$|\beta_1| + ... + |\beta_i| + |\gamma_1| + ... + |\gamma_j| + |\delta| \leqslant |\alpha|.$$

On doit donc majorer en $|.||^2_{0,\lambda,T}$ des termes de la forme

$$\lambda^{m-|\alpha|}Z^{\gamma_1}(\varepsilon^M w^\nu)...Z^{\gamma_j}(\varepsilon^M w^\nu)Z^\delta w^{\nu+1}. \tag{57}$$

On utilise les inégalités de Moser suivantes [12] :

**Lemme 6.1** *Soient $m$ entier naturel, $a_1,...,a_l$ dans $H^m(\Omega_T)$ et $\alpha := (\alpha_1,...\alpha_l)$ dans $\mathbb{N}^{n+1}, |\alpha| := |\alpha_1| + ... + |\alpha_l| \leqslant m$. Alors pour tout $\lambda \geqslant 1$*

$$\lambda^{m-\alpha|}|Z_1^\alpha a_1...Z_l^\alpha a_l||_{0,\lambda,T} \leqslant c\sum_j(\Pi_{i\neq j}||a_i||_\infty)|a_j||_{m,\lambda,T}$$

*La constante $c$ étant indépendante des $a_i$.*

Le terme (57) se majore alors par

$$cte(|w^{\nu+1}||_{m,\lambda,T} + \varepsilon^M||w^{\nu+1}||_\infty|w^\nu||_{m,\lambda,T})^2$$

ce qui achève la preuve. □

Le plongement Sobolev qui suit est démontré dans [12].

**Proposition 6.3** *Il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $w$ dans $E^{m,T}$,*

$$||w||_\infty \leqslant \rho Te^{\lambda T}(|w||_{m,\lambda,T} + |\partial_n w||_{m,\lambda,T}).$$

On en déduit par un simple changement de variable

**Proposition 6.4** *Il existe $\rho > 0$ tel que, pour tout $w \in E^{m,T}$, pour tout $\varepsilon$ dans $[0,1]$,*

$$\varepsilon^{\frac{1}{4}}||w||_\infty \leqslant \rho Te^{\lambda T}(|w||_{m,\lambda,T} + \sqrt{\varepsilon}|\partial_n w||_{m,\lambda,T}).$$

Notons que ce plongement est optimal. Prenons par exemple le cas où $n = 1$. On considère une famille de fonctions $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ où le graphe de $u^\varepsilon$ est un pic de largeur $\sqrt{\varepsilon}$ et de hauteur $\varepsilon^{-\frac{1}{4}}$ ie

$$u^\varepsilon(x) := 0 \quad \text{si} \quad |x| > \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2},$$
$$u^\varepsilon(x) := \varepsilon^{-\frac{1}{4}} - 2\varepsilon^{-\frac{3}{4}}|x| \quad \text{si} \quad |x| < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}.$$

On a $\varepsilon^{\frac{1}{4}}||u^\varepsilon||_{L^\infty} = O(1)$, $||u^\varepsilon||_{L^2} = O(1)$ et $\sqrt{\varepsilon}||u^\varepsilon||_{L^2} = O(1)$. Aussi, si l'on veut améliorer les estimations $L^\infty$ établies dans ce travail, il faut nécessairement se servir de l'équation (ce qui est fait dans le cas non caractéristique dans [18]) ou réduire l'espace fonctionnel ambiant.

Fixons un réel $\mu > 0$ arbitraire, un réel $\lambda_1$ donné par la proposition 6.2, $\lambda \geqslant 2\lambda_1$ et $h := \sup_{0<\varepsilon\leqslant 1}(|g_\varepsilon||_{m,\lambda,T} + |w^0||_{m,\lambda,T})$. On choisit alors $0 < \varepsilon < 1$ assez petit pour que $\varepsilon^{M-\frac{1}{4}} h\rho T e^{\lambda T} \leqslant min(\mu, 1)$.

**Proposition 6.5** *La suite $(w^\nu)_\nu$ satisfait*

$$\forall \nu \in \mathbb{N}, \quad \varepsilon^M ||w^\nu||_\infty \leqslant \mu, \quad ||w^\nu||_{m,\lambda,T} \leqslant h.$$

Preuve : On raisonne par récurrence sur $\nu$. La proposition est vraie pour $\nu = 0$. Supposons la vraie pour $\nu$ quelconque. Alors par la proposition 6.2, on a

$$\varepsilon|\nabla_x w^{\nu+1}||^2_{m,\lambda,T} + \lambda|w^{\nu+1}||^2_{m,\lambda,T} \leqslant \lambda^{-1}\lambda_1(h^2 + +(|w^{\nu+1}||_{m,\lambda,T} + \varepsilon^M h|w^{\nu+1}||_\infty)^2)$$

On utilise la proposition 6.4 pour contrôler $|w^{\nu+1}||_\infty$. Ainsi

$$\varepsilon|\nabla_x w^{\nu+1}||^2_{m,\lambda,T} + \lambda|w^{\nu+1}||^2_{m,\lambda,T} \leqslant \lambda^{-1}\lambda_1(h^2 +(|w^{\nu+1}||_{m,\lambda,T} + \varepsilon^{M-\frac{1}{4}} h\rho T e^{\lambda T}(|w^{\nu+1}||_{m,\lambda,T} + \sqrt{\varepsilon}|\partial_n w^{\nu+1}||_{m,\lambda,T})^2)$$

donc

$$\varepsilon|\nabla_x w^{\nu+1}||^2_{m,\lambda,T} + \lambda|w^{\nu+1}||^2_{m,\lambda,T} \leqslant \lambda^{-1}\lambda_1(h^2 +(2|w^{\nu+1}||_{m,\lambda,T} + \sqrt{\varepsilon}|\partial_n w^{\nu+1}||_{m,\lambda,T})^2)$$

et, par suite,

$$\varepsilon|\nabla_x w^{\nu+1}||^2_{m,\lambda,T} + \lambda|w^{\nu+1}||^2_{m,\lambda,T} \leqslant \lambda^{-1}\lambda_1(h^2 +8|w^{\nu+1}||^2_{m,\lambda,T} + 2\varepsilon|\partial_n w^{\nu+1}||^2_{m,\lambda,T})$$

d'où

$$\frac{1}{2}\varepsilon|\nabla_x w^{\nu+1}||^2_{m,\lambda,T} + \lambda|w^{\nu+1}||^2_{m,\lambda,T} \leqslant \lambda^{-1}\lambda_1(h^2 + 8|w^{\nu+1}||^2_{m,\lambda,T})$$

ainsi $|w^{\nu+1}||_{m,\lambda,T} \leqslant \frac{h}{2}$ et $\sqrt{\varepsilon}|\nabla_x w^{\nu+1}||_{m,\lambda,T} \leqslant \frac{h}{2}$ d'où

$$\varepsilon^M ||w^{\nu+1}||_\infty \leqslant \varepsilon^{M-\frac{1}{4}} \rho T e^{\lambda T} h \leqslant \mu \quad \square$$

On obtient alors classiquement une solution régulière de $\mathbb{P}^R(T)$ qui vérifie par passage à la limite $\varepsilon^M||w^\nu||_\infty = O(1)$ et $||w^\nu||_{m,\lambda,T} = O(1)$. Les dérivées normales itérées sont estimées ensuite, par récurrence, par l'équation. $\square$

Dans le cas critique $M = \frac{1}{4}$, la démonstration est similaire à la précédente sauf dans le contrôle $||.||_\infty$ : on joue sur le temps ne disposant plus assez de $\epsilon$. $\square$

# 7 Preuve de la proposition 3.4

• On commence par montrer le point 1 : pour cela on note que par les propositions 3.6 et 3.3, on peut construire une famille $(U^j_{init} := U^j_{init,a} + U^j_{init,b})_{0 \leqslant j \leqslant N}$ vérifiant les points 1 et 2 du théorème 5.3.

• Le point 2 découle de la définition tandis que le point 3 se montre comme le point 1.

• Pour le point 4, on procède comme suit. Grâce au point 3, on construit, si besoin est, des profils $(U^j_{init})_{N+1 \leqslant j \leqslant N'}$ tels que $\frac{N'}{2} > M$ et que la famille $(U^j_{init})_{0 \leqslant j \leqslant N'}$ soit dans $\mathcal{P}'_{init,N'}$.

On applique le théorème 4.1 puis le théorème 3.4 de façon à obtenir un réel $T > 0$ et une famille de profils $(\mathcal{U}^j)_{0 \leqslant j \leqslant N'}$ dans $\mathcal{P}(\Omega_T)^{N'+1}$ tels que

$$\mathcal{U}^j|_{t=0} = \mathcal{U}^j_{init} \quad \text{pour } 0 \leqslant j \leqslant N'$$

et tels que la famille $(a_\varepsilon)_\varepsilon$ définie par

$$a^\varepsilon(t,x) = \sum_{j=0}^{N'} \sqrt{\varepsilon}^j \, \mathcal{U}^j(t, x, \frac{x_n}{\varepsilon}, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}})$$

vérifie

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\varepsilon a^\varepsilon = \varepsilon^M R_\varepsilon &\quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_T \\ a^\varepsilon = 0 &\quad \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T \end{aligned}$$

où $R_\varepsilon \in \mathcal{H}^m(T)$.

On en déduit, pour tout entier naturel $j$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n_+$,

$$\begin{aligned} (\partial_t^j a^\varepsilon)|_{t=0}(x) &= \varepsilon^j (A_0^{-1} E_{n,n})^j (0,x) \partial_n^{2j} a^\varepsilon_{init}(x) + \mathcal{H}_j(\varepsilon, x, (\partial^\alpha a^\varepsilon_{init}(x))_{\alpha \in I_j}) \\ &+ \varepsilon^M R^\varepsilon_j(x) \end{aligned} \tag{58}$$

où $I_j := \{\alpha \in \mathbb{N}'^n / \quad |\alpha| \leqslant 2j; \alpha_n \neq 2j\}$, $a^\varepsilon_{init} := a_\varepsilon|_{t=0}$ et $R^\varepsilon_j := (\partial_t^j R_\varepsilon)|_{t=0}$.

On cherche $(r^\varepsilon_{init})$ tel que $u^\varepsilon_{init} = a^\varepsilon_{init} + \varepsilon^M r^\varepsilon_{init}$ vérifie

$$\{\varepsilon^j (A_0^{-1} E_{nn})^j (0,x).\partial_n^{2j} (u^\varepsilon_{init})(x) + \mathcal{H}_j(\varepsilon, x, (\partial^\alpha u^\varepsilon_{init})_{\alpha\in I_j})\}|_{x_n=0} = 0.$$

Tenant compte de (58), cela revient à des identités de la forme

$$\begin{aligned} &\{\varepsilon^j (A_0 E_{nn})^j (0,x).\partial_n^{2j} r^\varepsilon_{init}(x) \\ &+ \sum_\alpha \mathcal{H}_j^{\flat,\alpha}(\varepsilon, x, \varepsilon^M (\partial^\alpha r^\varepsilon_{init}(x))_{\alpha\in I_j}, (\partial^\alpha a^\varepsilon_{init}(x))_{\alpha\in I_j}).\partial^\alpha r^\varepsilon_{init}(x)\}|_{x_n=0} = R^\varepsilon_j(y,0)\end{aligned}$$

où les fonctions $\mathcal{H}_j^{\flat,\alpha}$ sont de classe $C^\infty$.

On montre par récurrence que l'on peut construire une famille de fonctions $(r^\varepsilon_j)_{\varepsilon\in[0,1[, 0\leqslant j\leqslant m}$ dans $H^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ tel que, pour tout $y \in \mathbb{R}^{n-1}$,

$$r^\varepsilon_0(y) = 0 \quad \text{et,} \quad \text{pour } j \geq 1,$$
$$\varepsilon^j (A_0^{-1} E_{n,n})^j (0,y,0).\partial_n^{2j} r^\varepsilon_0(y) + \mathcal{H}_j(\varepsilon, y, 0, (\partial^\alpha u^\varepsilon_0(y))_{\alpha|\in I_j}) = 0$$
$$\sup_{\varepsilon\in]0,1]} ||r^\varepsilon_0||_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})} + \sum_{k=1}^s \varepsilon^{k-\frac{1}{2}} ||r^\varepsilon_k||_{H^{s-k}(\mathbb{R}^{n-1})} < \infty.$$

Les $r^\varepsilon_j$ peuvent être définis par récurrence sur $j$, en imposant que les $r^\varepsilon_j$, pour les indices de $j$ impairs, soient identiquement nuls. On vérifie, pour tout $j$, que

$$\sup_{\varepsilon\in]0,1]} ||r^\varepsilon_0||_{H^j(\mathbb{R}^{n-1})} + \sum_{k=1}^j \varepsilon^{k-\frac{1}{2}} ||r^\varepsilon_k||_{H^{j-k}(\mathbb{R}^{n-1}))<\infty}.$$

grâce à des inégalités de type Moser/ Gagliardo-Nirenberg.

On conclut avec le lemme 3.3. □

# A Preuve du théorème 3.9

Nous allons esquisser une preuve du théorème 3.9 qui est un cas particulier du théorème de [9]. Le point important est le caractère semilinéaire du cas étudié ici qui permet de préciser la condition d'explosion. C'est ce que met en évidence les lignes qui suivent. Une solution de régularité finie est obtenue au moyen d'un schéma itératif dans lequel le contrôle en $||.||_\infty$ est déterminant.

On va utiliser des espaces de type Sobolev pour lesquels une dérivée normale vaut deux dérivées conormales.

**Définition A.1** *Soit $H^{0,m}(\Omega_T) := \{u \in L^2(\Omega_T)/ \quad \forall l \leqslant k/ \quad Z^l u \in L^2(\Omega_T)\}$ et*

$$E^{m,T} := \{u \in H^{0,m}(\Omega_T)/\partial_n^k u \in H^{0,m-2k}(\Omega_T) \quad \forall 0 \leqslant 2k \leqslant m\}$$

*muni de la famille de normes à poids :*

$$|u|^E_{m,\lambda,T} := \sum_{0 \leqslant k+2l \leqslant m} \lambda^{m-k-2l} ||e^{-\lambda t} Z^k \partial_n^l u||_{L^2(\Omega_T)}.$$

**Théorème A.1** *Soit $T$ est un temps strictement positif, une fonction $f \in E^{m,T}$ et $u \in E^{m,T}$ solution de (19). Alors il existe un temps $T_0 > T$ et un unique prolongement de $u$ (en une fonction encore noté $u$) dans $E^{m,T_0}$ solution de*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}u = F(t,x,u) + f(t,x) \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_{T_0} \\ M(t,y)u = g(t,y) \quad \text{quand } (t,x) \in \Gamma_{T_0} \end{array} \right. \tag{59}$$

*De plus, si $T^* := \sup\{T_0 > T/$ il existe un prolongement de $u$ en une fonction de $E^{m,T_0}$ encore notée $u$ solution de (59)$\}$ est fini, alors $\lim_{t \to T^*} ||u||_{L^\infty(\Omega_t)} = +\infty$. Dans le cas linéaire , $T^* = \infty$.*

**Remarque A.1** *Si les espaces $E^{m,T}$ sont satisfaisants pour le problème de propagation, on attire l'attention du lecteur sur le fait qu'il n'en est rien pour le problème de Cauchy. En particulier, la régularité en temps peut être mesurée en norme $L^\infty$.*

Preuve : on va se concentrer sur l'existence. L'unicité et la caractérisation de l'explosion se déduisent de manière classique. On se ramène au cas où $u$ est nulle pour $t \in (0,T)$.

Suivant [24], on peut supposer sans perte de généralité que

$$A_n(t,y,0) = \begin{bmatrix} Id_{d_+} & 0 & 0 \\ 0 & -Id_{d_-} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M := \begin{bmatrix} Id_{d_+} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On écrit $u = \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$ avec $v \in \mathbb{R}^{L-d_0}$ et $v \in \mathbb{R}^{d_0}$. On commence par le problème linéaire :

**Théorème A.2** *Le problème linéaire*

$$\mathcal{H}u = f \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_{T_0} \tag{60}$$

$$Mu = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Gamma_{T_0} \tag{61}$$

$$u = 0 \quad \text{quand } t \in (0,T) \tag{62}$$

*admet une unique solution régulière . Celle-ci vérifie les estimations*

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \exists \lambda_m / \quad \forall \lambda \geqslant \lambda_m, \quad |u|^E_{m,\lambda,T_0} \leqslant \frac{\lambda}{\lambda_m} |f|^E_{m,\lambda,T_0}.$$

Preuve : il s'agit d'estimer pour $2k+|l| \leqslant m$ le terme

$$\lambda^{m-2k-l}|\partial_n^k Z^l u|^E_{0,\lambda,T_0}.$$

Estimation $L^2$
C'est un cas particulier de [24].

$k=0$
$Z^l u$ vérifie (60)- (61)- (62) avec $\bar{f} := Z^l f + [\mathcal{H}, Z^l]u$ en lieu et place de $f$. L'estimation de ce dernier commutateur assure que $\bar{f} \in L^2$ et avec l'estimation $L^2$ que

$$\lambda^{m-2k-l}|Z^l u|^E_{0,\lambda,T_0} \leqslant \frac{C}{\lambda}|f|^E_{m,\lambda,T_0}.$$

$k \neq 0$
On estime séparément les dérivées de $v$ et celles de $w$. En écrivant les matrices par blocs, (60) se réécrit :

$$\sum_{j=0}^{n} A^{j,[1]} Z_j v + \sum_{j=0}^{n} A^{j,[2]} Z_j w + B^{[1]} v + B^{[2]} w + \mathfrak{C}\partial_n v = f^{[1]},$$
$$\sum_{j=0}^{n} A^{j,[3]} Z_j v + \sum_{j=0}^{n} A^{j,[4]} Z_j w + B^{[3]} v + B^{[4]} w = f^{[2]}.$$

où $\mathfrak{C}$ est la matrice de taille $(L-d_0)\times(L-d_0)$, diagonale $\mathfrak{C} = diag(Id_{d_+}, Id_{d_-}, 0_{d_0})$. On abrégera l'écriture précédente en

$$A^{[1]}Zv + A^{[2]}Zw + B^{[1]}v + B^{[2]}w + \partial_n v = f^{[1]} \tag{63}$$
$$A^{[3]}Zv + A^{[4]}Zw + B^{[3]}v + B^{[4]}w = f^{[2]} \tag{64}$$

$v$ : on a $|\partial_n v|^E_{m-2,\lambda,T_0} \leqslant \frac{1}{\lambda}|\partial_n v|^E_{m-1,\lambda,T_0}$
De plus, $|\partial_n v|^E_{m-1,\lambda,T_0}$ peut être estimé grâce à (63).

$w$ : notons $\mathbb{X} := A^{[4]}Z + B^{[4]}$. $\mathbb{X}$ est un opérateur symétrique hyperbolique pour lequel le bord $\{x_n = 0\}$ est totalement caractéristique. Alors (64) se réécrit

$$\mathbb{X}w = f^{[2]} - A^{[3]}Zv - B^{[3]}v$$

ainsi

$$|\partial_n \mathbb{X} w|^E_{m-2,\lambda,T_0} \leqslant (|u|^E_{m,\lambda,T_0} + |f|^E_{m,\lambda,T_0}). \tag{65}$$

Ensuite, on a que $\mathbb{X}\partial_n^k Z^l w$ vérifie $\mathbb{X}\partial_n^k Z^l w = \bar{f}$ où $\bar{f} := \partial_n^k Z^l \mathbb{X} w + [\mathbb{X}, \partial_n^k Z^l]w$. Ecrivant $k = k'+1$, on a

$$\bar{f} := (\partial_n)^{k'} Z^l (\partial_n \mathbb{X} w) + [\mathbb{X}, \partial_n^k Z^l]w.$$

Le premier terme est contrôlé par (65) ($2k' + l \leqslant m - 2$). Pour le second, on écrit

$$[\mathbb{X}, \partial_n^k Z^l]w = [A^{[4]}Z, \partial_n^k Z^l]w + [B^{[4]}, \partial_n^k Z^l]w.$$

Voyons comment contrôler le premier terme qui est le "pire"(il contient une dérivée supplémentaire). $[A^{[4]}Z, \partial_n^k Z^l]w$ est une somme de terme de types

$$((\partial_n)^{k_1} Z^{l_1} A^{[4]})((\partial_n)^{k_2} Z^{l_2} Z)w$$

avec $k_1 + k_2 = k$, $l_1 + l_2 = l$ et $0 < 2k_1 + |l_1| < m$. L'estimation $L^2$ appliquée à $\mathbb{X}$ donne alors l'existence de $\lambda_m$ tel que

$$\forall \lambda \geqslant \lambda_m \quad |(\partial_n)^k Z^l w|_2 \leqslant \frac{C}{\lambda}(|u|^E_{m,\lambda,T_0} + |f|^E_{m,\lambda,T_0}) \quad \square$$

On utilise le shéma itératif :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}u^{\nu+1} = F(t,x,u^\nu) + f &\quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_{T_0} \\ Mu^{\nu+1} = 0 &\quad \text{quand } (t,x) \in \Gamma_{T_0} \\ u^{\nu+1} = 0 &\quad \text{quand } t \in (0,T) \end{aligned}$$

initialisé par $u^0 := 0$.

Soit $R$ un réel positif. Les deux lemmes suivants sont démontrés dans [9].

**Lemme A.1** *Il existe un réel $l > 0$ tel que, pour tout $\lambda \geqslant 1$, si $|u|_\infty \leqslant R$ on a $|F(t,x,u)|^E_{m,\lambda,T_0} \leqslant l|u|^E_{m,\lambda,T_0}$.*

**Lemme A.2** *Il existe un réel $c > 0$ tel que, pour tout $u$ dans $E^{m,T_0}$, $|u|_\infty \leqslant cT_0 e^{\lambda T_0}|u|^E_{m,\lambda,T_0}$.*

On considère $\lambda$ tel que $\frac{\lambda}{\lambda_m} l \leqslant \frac{1}{2}$, $\mu := 2|f|^E_{m,\lambda,\infty}$ et $T_0$ tel que $cT_0 e^{\lambda T_0} \leqslant R$.

**Lemme A.3** *La suite $(u^\nu)_\nu$ vérifie , pour tout $\nu \in \mathbb{N}$, $|u^\nu|_\infty \leqslant R$ et $|u^\nu|^E_{m,\lambda,T_0} \leqslant \mu$.*

Preuve : on raisonne par récurrence. Si $|u^\nu|_\infty \leqslant R$ et $|u^\nu|^E_{m,\lambda,T_0} \leqslant \mu$ alors par le théorème $A.2$, on a

$$|u^{\nu+1}|^E_{m,\lambda,T_0} \leqslant \frac{\lambda_m}{\lambda}(l|u^\nu|^E_{m,\lambda,T_0} + |f|^E_{m,\lambda,\infty}) \leqslant \mu$$

d'où par le lemme $A.2$, $|u^{\nu+1}|_\infty \leqslant cT_0 e^{\lambda T_0}\mu \leqslant R$. $\square$

## B Preuve de la proposition 3.3

Soit $\chi$ une fonction $C^\infty$ à support dans $]-1,1[$ et telle que $\chi(x)=1$ si $|x| \leqslant \frac{1}{2}$. Soit $(M_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs tels que, pour tout $j$, pour tout $x_n \geqslant 0$ et tout $m$ entier naturel tel que $0 \leqslant m \leqslant j-1$,

$$|\partial_n^m(x_n^j \chi(M_j x_n))|.||b_j||_{H^j(\mathbb{R}^{n-1})} \leqslant \frac{1}{2^j}. \tag{66}$$

Une telle suite peut être construite de la manière suivante : si $M^{j-1}$ est construit, on remarque que $\partial_n^m(x_n^j\chi(M_j x_n)$ est une conbinaison de facteurs de la forme

$$x_n^{j-l} M_j^k \chi^{(k)}(M_j x_n) \tag{67}$$

avec $k+l=m \leqslant j-1$.
On a que $\chi^{(k)}(M_j x_n)=0$ si $|x_n| \geqslant \frac{1}{M_j}$.
Notant $l_j := max_{0\leqslant k\leqslant j}||\chi^{(k)}||_{L^\infty(\mathbb{R})}$, le terme (67) est donc majoré, en valeur absolue, par $\frac{l_j}{M_j^{j-(k+l)}}$.
Si $M_j \geqslant 1$, on a donc, pour une constante $c_j$ adéquate, pour tout $x_n \geqslant 0$,

$$|\partial_n^m(x_n^j\chi(M_j x_n)| \leqslant c_j \frac{l_j}{M_j}.$$

Il suffit ainsi de choisir $M_j$ suffisamment grand. On définit, pour tout $j$ entier naturel, la fonction

$$\mathfrak{b}_j(y,x_n) := x_n^j.\chi(M_j x_n).b_j(y).$$

Ces fonctions $\mathfrak{b}_j$ sont $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^n_+$ et vérifient, pour tout $m$ entier naturel,

$$\sum_{j\geqslant 0} \sup_{x_n \geqslant 0} a_{m,j}(x_n) < \infty \quad \text{où}$$
$$a_{m,j}(x_n) := ||\partial_n^m \mathfrak{b}_j(.,x_n)||_{H^m(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

En effet, pour tout $m$ entier naturel, la fonction

$$g_m(x_n) := \sum_{0\leqslant j\leqslant m} \sup_{x_n\geqslant 0} a_{m,j}(x_n)$$

est bornée uniformément sur $\mathbb{R}^n_+$ par une constante $C_m$. Scindant la somme selon que $j \leqslant m$ ou $j \geqslant m+1$, on obtient

$$\sum_{j\geqslant 0} \sup_{x_n\geqslant 0} a_{m,j}(x_n) \quad \leqslant \quad C_m + \sum_{j\geqslant m+1} \sup_{x_n\geqslant 0} a_{m,j}(x_n).$$

Or, pour tout $j \geqslant m+1$, on a, avec (66),

$$a_{m,j}(x_n) \leqslant ||\partial_n^m \mathfrak{b}_j(.,x_n)||_{H^j(\mathbb{R}^{n-1})} = |\partial_n^m(x_n^j\chi(M_j x_n))|.||b_j||_{H^j(\mathbb{R}^{n-1})} \leqslant \frac{1}{2^j}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{j\geqslant 0}\sup_{x_n\geqslant 0} a_{m,j}(x_n) &\leqslant C_m + \sum_{j\geqslant m+1}\frac{1}{2^j}\\ &< \infty.\end{aligned}$$

Le théorème de différentiation terme à terme assure alors que la fonction

$$b(y,x_n) := \sum_{j\geqslant 0}\mathfrak{b}_j(y,x_n)$$

est bien définie et appartient à $H^\infty(\mathbb{R}^n_+)$. De plus, pour tout $k$ entier naturel,

$$\partial_n^k b|_{x_n=0} = \sum_{j\geqslant 0}\partial_n^k b_j|_{x_n=0} = b_k \quad \square$$

## Références


[1] C. Bardos, D. Brézis, and H. Brezis. Perturbations singulières et prolongements maximaux d'opérateurs positifs. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 53 :69–100, 1973/74.

[2] Claude Bardos. Problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre à coefficients réels ; théorèmes d'approximation ; application à l'équation de transport. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 3 :185–233, 1970.

[3] Claude Bardos and Jeffrey Rauch. Maximal positive boundary value problems as limits of singular perturbation problems. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 270(2) :377–408, 1982.

[4] Gilles Carbou, Pierre Fabrie, and Olivier Guès. Couche limite dans un modèle de ferromagnétisme. *Comm. Partial Differential Equations*, 27(7-8) :1467–1495, 2002.

[5] Phillipe Donnat. *Quelques contributions mathématiques en optique non linéaire*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, 1994.

[6] E. Grenier. On the stability of boundary layers of incompressible Euler equations. *J. Differential Equations*, 164(1) :180–222, 2000.

[7] Emmanuel Grenier. On the nonlinear instability of Euler and Prandtl equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 53(9) :1067–1091, 2000.

[8] Emmanuel Grenier and Olivier Guès. Boundary layers for viscous perturbations of noncharacteristic quasilinear hyperbolic problems. *J. Differential Equations*, 143(1) :110–146, 1998.

[9] Olivier Guès. Problème mixte hyperbolique quasi-linéaire caractéristique. *Comm. Partial Differential Equations*, 15(5) :595–645, 1990.

[10] Olivier Guès. Ondes multidimensionnelles $\epsilon$-stratifiées et oscillations. *Duke Math. J.*, 68(3) :401–446, 1992.

[11] Olivier Guès. Développement asymptotique de solutions exactes de systèmes hyperboliques quasilinéaires. *Asymptotic Anal.*, 6(3) :241–269, 1993.

[12] Olivier Guès. Perturbations visqueuses de problèmes mixtes hyperboliques et couches limites. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 45(4) :973–1006, 1995.

[13] Lars Hörmander. *Linear partial differential operators*. Springer Verlag, Berlin, 1976.

[14] Jean-Luc Joly and Jeffrey Rauch. Justification of multidimensional single phase semilinear geometric optics. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 330(2) :599–623, 1992.

[15] Tosio Kato. Nonstationary flows of viscous and ideal fluids in $\mathbf{R}^3$. *J. Functional Analysis*, 9 :296–305, 1972.

[16] Sergiu Klainerman and Andrew Majda. Singular limits of quasilinear hyperbolic systems with large parameters and the incompressible limit of compressible fluids. *Comm. Pure Appl. Math.*, 34(4) :481–524, 1981.

[17] Guy Métivier. Stability of multidimensional shocks. Cours de DEA.

[18] Guy Métivier. Stability of small viscosity noncharacteristic boundary layers. Cours de DEA.

[19] Guy Métivier and Zumbrun Kevin. Large viscous boundary layers for noncharacteristic nonlinear hyperbolic problems. Preprint.

[20] Tatsuo Nishitani and Masahiro Takayama. Characteristic initial-boundary value problems for symmetric hyperbolic systems. *Osaka J. Math.*, 35(3) :629–657, 1998.

[21] R. S. Phillips and Leonard Sarason. Singular symmetric positive first order differential operators. *J. Math. Mech.*, 15 :235–271, 1966.

[22] J. Rauch. Boundary value problems as limits of problems in all space. In *Séminaire Goulaouic-Schwartz (1978/1979)*, pages Exp. No. 3, 17. École Polytech., Palaiseau, 1979.

[23] J. Rauch. Boundary value problems with nonuniformly characteristic boundary. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 73(4) :347–353, 1994.

[24] Jeffrey Rauch. Symmetric positive systems with boundary characteristic of constant multiplicity. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 291(1) :167–187, 1985.

[25] Frédéric Rousset. Inviscid boundary conditions and stability of viscous boundary layers. *Asymptot. Anal.*, 26(3-4) :285–306, 2001.

[26] Paolo Secchi. A symmetric positive system with nonuniformly characteristic boundary. *Differential Integral Equations*, 11(4) :605–621, 1998.

[27] Paolo Secchi. Full regularity of solutions to a nonuniformly characteristic boundary value problem for symmetric positive systems. *Adv. Math. Sci. Appl.*, 10(1) :39–55, 2000.

[28] Mark Williams. Highly oscillatory multidimensional shocks. *Comm. Pure Appl. Math.*, 52(2) :129–192, 1999.

[29] Mark Williams. Boundary layers and glancing blow-up in nonlinear geometric optics. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 33(3) :383–432, 2000.